

Výroková a predikátová logika - VI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

Predikátová logika

Zabývá se tvrzeními o individuích, jejich vlastnostech a vztazích.

“Je inteligentní a její otec zná pana rektora.”

$$I(x) \wedge Z(o(x), r)$$

- x je **proměnná**, reprezentuje individuum,
- r je **konstantní symbol**, reprezentuje konkrétní individuum,
- o je **funkční symbol**, reprezentuje funkci,
- I, Z jsou **relační (predikátové) symboly**, reprezentují relace (vlastnost “být inteligentní” a vztah “znát”).

“Funkce f je na (surjektivní).”

$$(\forall x)(\exists y)(f(y) = x)$$

- $(\forall x)$ je **všeobecný (univerzální) kvantifikátor** proměnné x ,
- $(\exists y)$ je **existenční kvantifikátor** proměnné y ,
- $=$ je (binární) **relační symbol**, reprezentuje identickou relaci.

Jazyk

Jazyk 1. řádu obsahuje

- **proměnné** $x, y, z, \dots, x_0, x_1, \dots$ (spočetně mnoho), množinu všech proměnných značíme **Var**,
- **funkční symboly** $f, g, h, \dots$, včetně **konstantních symbolů** $c, d, \dots$, což jsou nulární funkční symboly,
- **relační (predikátové) symboly** $P, Q, R, \dots$, případně symbol $=$ (**rovnost**) jako speciální relační symbol,
- **kvantifikátory** $(\forall x), (\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \text{Var}$,
- **logické spojky** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **závorky** $(,)$

Každý funkční i relační symbol S má danou **aritu** (**četnost**) $\text{ar}(S) \in \mathbb{N}$.

***Poznámka** Oproti výrokové logice nemáme (explicitně) výrokové proměnné, lze je zavést jako nulární relační symboly.*

Signatura jazyka

- Proměnné, kvantifikátory, logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco funkční a relační symboly (kromě případné rovnosti) jsou *mimologické symboly*. Rovnost (*obvykle*) uvažujeme zvlášť.
- *Signatura* je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ disjunktních množin relačních a funkčních symbolů s danými aritami, přičemž žádný z nich není rovnost. Signatura tedy určuje všechny mimologické symboly.
- *Jazyk* je dán signaturou $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a uvedením, zda jde o jazyk s rovností či bez rovnosti. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (mimologický nebo rovnost).

Poznámka Význam symbolů není v jazyce určen, např. $symbol + nemusí$ reprezentovat standardní sčítání.

Příklady jazyků

Jazyk obvykle uvádíme výčtem mimologických symbolů s případným upřesněním, zda jde o funkční či relační symboly a jakou mají aritu.

Následující příklady jazyků jsou všechny s **rovností**.

- $L = \langle \rangle$ je jazyk **čisté** rovnosti,
- $L = \langle c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ je jazyk spočetně mnoha konstant,
- $L = \langle \leq \rangle$ je jazyk **uspořádání**,
- $L = \langle E \rangle$ je jazyk teorie **grafů**,
- $L = \langle +, -, 0 \rangle$ je jazyk teorie **grup**,
- $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je jazyk teorie **těles**,
- $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je jazyk **Booleových algeber**,
- $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je jazyk **aritmetiky**,

kde $c_i, 0, 1$ jsou konstantní symboly, $S, -$ jsou unární funkční symboly, $+, \cdot, \wedge, \vee$ jsou binární funkční symboly, $E, \leq$ jsou binární relační symboly.

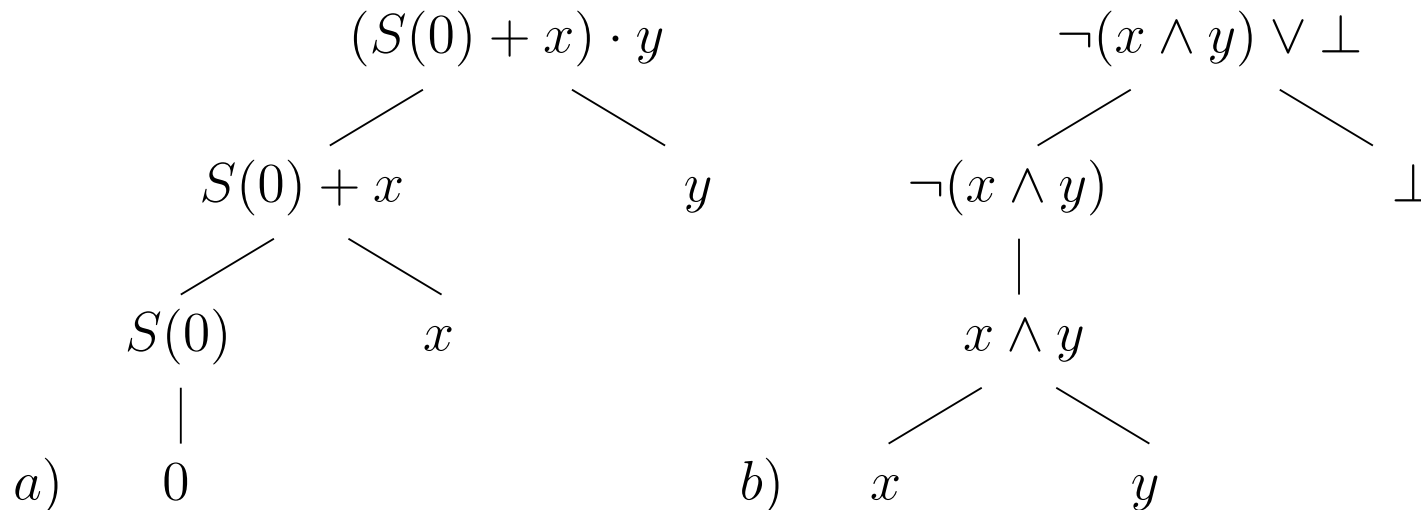
Termy

Jsou výrazy reprezentující hodnoty (složených) funkcí.

Termy jazyka L jsou dány indukčním předpisem

- (i) každá proměnná nebo konstantní symbol je term,
 - (ii) je-li f funkční symbol jazyka L s aritou $n > 0$ a $t_0, \dots, t_{n-1}$ jsou termy, pak je i výraz $f(t_0, \dots, t_{n-1})$ term,
 - (iii) každý term vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii).
- **Konstantní (ground) term** je term bez proměnných, např. $f(0) + 1$.
 - Množinu všech termů jazyka L značíme Term_L .
 - Termu, jenž je součástí jiného termu t , říkáme **podterm** termu t .
 - Strukturu termu můžeme reprezentovat jeho **vytvorujícím stromem**.
 - U binárních funkčních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např. píšeme $(x + y)$ namísto $+(x, y)$.

Příklady termů



- $a)$ Vytvořující strom termu $(S(0) + x) \cdot y$ jazyka aritmetiky.
- $b)$ Výrokové formule se spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$, případně s konstantami $\top$, $\perp$ lze chápat jako termy jazyka Booleových algeber.

Atomické formule

Jsou nejjednodušší formule.

- **Atomická formule** jazyka L je výraz $R(t_0, \dots, t_{n-1})$, kde R je n -ární relační symbol jazyka L a $t_0, \dots, t_{n-1}$ jsou termy jazyka L .
- Množinu všech atomických formulí jazyka L značíme $\mathbf{AFm}_L$.
- Strukturu atomické formule můžeme reprezentovat **vytvorujícím stromem** z vytvorujících podstromů jejích termů.
- U binárních relačních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např.
 $t_1 = t_2$ namísto $=(t_1, t_2)$ či $t_1 \leq t_2$ namísto $\leq(t_1, t_2)$.
- *Příklady atomických formulí*

$$Z(o(x), r), \quad x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y, \quad \neg(x \wedge y) \vee \perp = \perp.$$

Formule

Formule jazyka L jsou výrazy dané induktivním předpisem

- (i) každá atomická formule jazyka L je formule,
 - (ii) jsou-li φ, ψ formule, pak i následující výrazy jsou formule
$$(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi),$$
 - (iii) je-li φ formule a x proměnná, jsou výrazy $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ formule.
 - (iv) každá formule vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).
- Množinu všech formulí jazyka L značíme $\mathbf{Fm}_L$.
 - Formuli, jež je součástí jiné formule φ , nazveme **podformule** formule φ .
 - Strukturu formule můžeme reprezentovat jejím **vytvorujícím stromem**.

Konvence zápisu

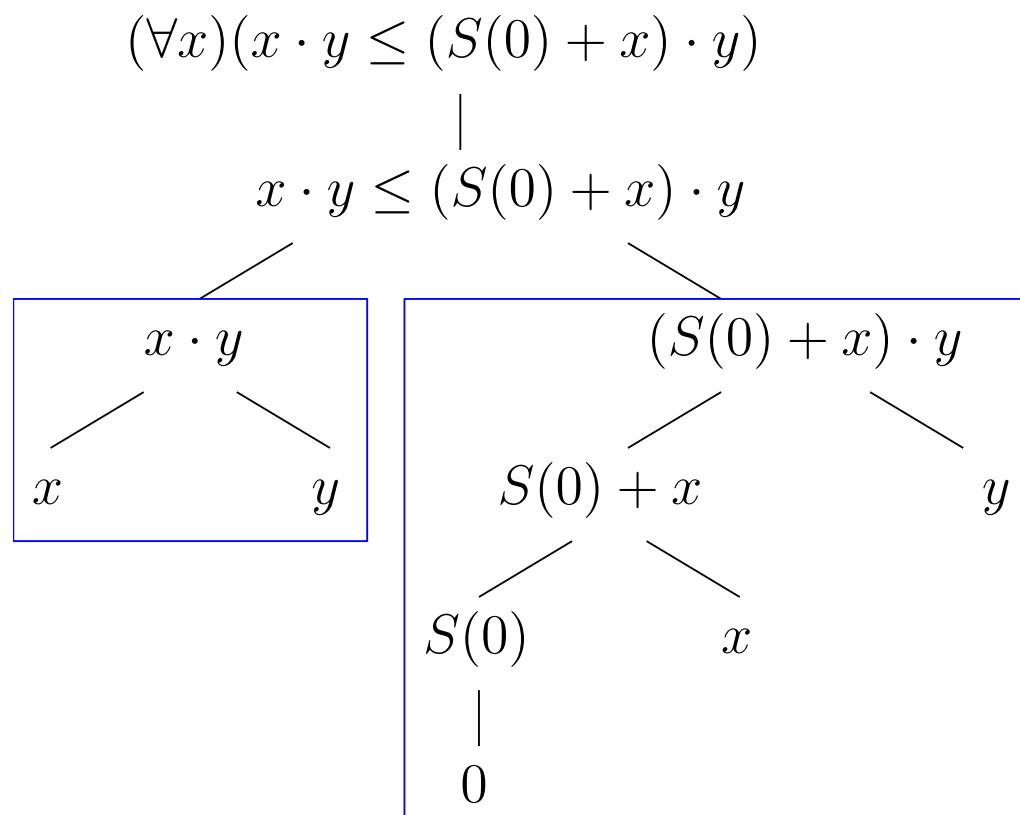
- Zavedení *priorit* binárních funkčních symbolů např. $+$, $\cdot$ umožňuje při infixním zápisu vypouštět závorky okolo podtermu vzniklého symbolem vyšší priority, např. $x \cdot y + z$ reprezentuje term $(x \cdot y) + z$.
- Zavedení *priorit* logických spojek a kvantifikátorů umožňuje vypouštět závorky okolo podformule vzniklé spojkou s vyšší prioritou.

$$(1) \rightarrow, \leftrightarrow \quad (2) \wedge, \vee \quad (3) \neg, (\forall x), (\exists x)$$

- Okolo podformulí vzniklých $\neg$, $(\forall x)$, $(\exists x)$ lze závorky vypustit vždy.
- Můžeme vypustit závorky i okolo $(\forall x)$ a $(\exists x)$ pro každé $x \in \text{Var}$.
- Rovněž vnější závorky můžeme vynechat.

$$\begin{aligned} & (((\neg((\forall x)R(x))) \wedge ((\exists y)P(y))) \rightarrow (\neg(((\forall x)R(x)) \vee (\neg((\exists y)P(y))))) \\ & \neg(\forall x)R(x) \wedge (\exists y)P(y) \rightarrow \neg((\forall x)R(x) \vee \neg(\exists y)P(y)) \end{aligned}$$

Příklad formule



Vytvořující strom formule $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$.

Výskyt proměnné

Nechť φ je formule a x je proměnná.

- **Výskyt** proměnné x ve φ je list vytvořujícího stromu φ označený x .
- Výskyt x ve φ je **vázaný**, je-li součástí nějaké podformule ψ začínající kvantifikátorem $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$. Není-li výskyt vázaný, je **volný**.
- Proměnná x je **volná** ve φ , pokud má volný výskyt ve φ .
Je **vázaná** ve φ , pokud má vázaný výskyt ve φ .
- Proměnná x může být zároveň volná i vázaná ve φ . Např. ve formuli

$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z.$$

- Zápis $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ značí, že $x_1, \dots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve formuli φ .

Poznámka Uvidíme, že pravdivostní hodnota formule (při dané interpretaci symbolů) závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.

Otevřené a uzavřené formule

- Formule je *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Pro množinu OFm_L všech otevřených formulí jazyka L platí $\text{AFm}_L \subsetneq \text{OFm}_L \subsetneq \text{Fm}_L$.
- Formule je *uzavřená* (*sentence*), pokud nemá žádnou volnou proměnnou, tj. všechny výskyty proměnných jsou vázané.
- Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, pak všechny její termy jsou konstantní.

$x + y \leq 0$	<i>otevřená</i> , $\varphi(x, y)$
$(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$	<i>uzavřená (sentence)</i> ,
$(\forall x)(x + y \leq 0)$	<i>ani otevřená, ani uzavřená</i> , $\varphi(y)$
$1 + 0 \leq 0$	<i>otevřená i uzavřená</i>

Poznámka Uvidíme, že *sentence* má při dané interpretaci symbolů pevný význam, tj. její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení proměnných.

Instance

Když do formule za volnou proměnnou x **dosadíme** term t , požadujeme, aby vzniklá formule *říkala (nově) o termu t “totéž”, co předtím říkala o proměnné x .*

$\varphi(x)$	$(\exists y)(x + y = 1)$	“existuje prvek $1 - x$ ”
pro $t = 1$ lze $\varphi(x/t)$	$(\exists y)(1 + y = 1)$	“existuje prvek $1 - 1$ ”
pro $t = y$ nelze	$(\exists y)(y + y = 1)$	“1 je dělitelné 2”

- Term t je **substituovatelný** za proměnnou x ve formuli φ , pokud po současném nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t .
- Pak vzniklou formuli značíme $\varphi(x/t)$ a zveme ji **instance** formule φ vzniklá **substitucí** termu t za proměnnou x do φ .
- t není substituovatelný za x do φ , právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ začínající $(\forall y)$ nebo $(\exists y)$ pro nějakou proměnnou y z t .
- **Konstantní** termy jsou substituovatelné vždy.

Varianty

Kvantifikované proměnné lze (za *určitých* podmínek) přejmenovat tak, že vznikne ekvivalentní formule.

Nechť $(Qx)\psi$ je podformule ve φ , kde Q značí $\forall$ či $\exists$, a y je proměnná, tž.

- 1) y je *substituovatelná* za x do ψ , a
- 2) y nemá *volný* výskyt v ψ .

Nahrazením podformule $(Qx)\psi$ za $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne *varianta* formule φ *v podformuli* $(Qx)\psi$. Postupnou variací jedné či více podformulí ve φ vznikne *varianta* formule φ . Např.

$$(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$$

$$(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$$

$$(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$$

$$(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$$

je formule φ ,

je varianta φ ,

není varianta φ , neplatí 1),

není varianta φ , neplatí 2).

Struktury - příklady

- $\mathcal{S} = \langle S, \leq \rangle$ **uspořádaná** množina, kde $\leq$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní binární relace na S ,
- $G = \langle V, E \rangle$ neorientovaný **graf** bez smyček, kde V je množina *vrcholů*, E je ireflexivní, symetrická binární relace na V (*sousednost*),
- $\underline{\mathbb{Z}}_p = \langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0 \rangle$ **grupa** sčítání celých čísel modulo p ,
- $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ **těleso** racionálních čísel.
- $\underline{\mathcal{P}}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ **potenční algebra** nad množinou X ,
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ standardní model **aritmetiky** (přirozených čísel),
- konečné automaty a další modely výpočtu,
- relační databáze, ...

Struktura pro jazyk

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk a A je neprázdná množina.

- *Realizace (interpretace) relačního symbolu* $R \in \mathcal{R}$ na A je libovolná relace $R^A \subseteq A^{\text{ar}(R)}$. Realizace rovnosti na A je relace Id_A (identita).
- *Realizace (interpretace) funkčního symbolu* $f \in \mathcal{F}$ na A je libovolná funkce $f^A : A^{\text{ar}(f)} \rightarrow A$. Realizace konstantního symbolu je tedy prvek z A .

Struktura pro jazyk L (*L-struktura*) je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$, kde

- A je neprázdná množina, zvaná *doména (univerzum)* struktury $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{R}^A = \langle R^A \mid R \in \mathcal{R} \rangle$ je *soubor* realizací relačních symbolů (relací),
- $\mathcal{F}^A = \langle f^A \mid f \in \mathcal{F} \rangle$ je *soubor* realizací funkčních symbolů (funkcí).

Strukturu pro jazyk L nazýváme také *model jazyka* L . Třída všech modelů jazyka L se značí $M(L)$. Např. struktury pro jazyk $L = \langle \leq \rangle$ jsou

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle, \langle \mathbb{Q}, > \rangle, \langle X, E \rangle \text{ pokud } X \neq \emptyset, \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle.$$

Hodnota termu

Nechť t je term jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L .

- *Ohodnocení proměnných* v množině A je funkce $e: \text{Var} \rightarrow A$.
- *Hodnota* $t^{\mathcal{A}}[e]$ termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je dána induktivním předpisem

$$x^{\mathcal{A}}[e] = e(x) \quad \text{pro každé } x \in \text{Var},$$

$$(f(t_0, \dots, t_{n-1}))^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}[e]) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{F}.$$

- Speciálně, pro konstantní symbol c je $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$.
- Je-li t **konstantní** term, jeho hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e .
- Hodnota termu v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných.

Např. hodnota termu $x + 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ při ohodnocení e , pro které $e(x) = 2$, je $(x + 1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$.

Hodnota atomické formule

Nechť φ je **atomická** formule tvaru $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L .

- **Hodnota** $H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je

$$H_{at}^{\mathcal{A}}(R(t_0, \dots, t_{n-1}))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_0^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}[e]) \in R^A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

přičemž $=^{\mathcal{A}}$ je Id_A , tj. $H_{at}^{\mathcal{A}}(t_0 = t_1)[e] = 1$ pokud $t_0^{\mathcal{A}}[e] = t_1^{\mathcal{A}}[e]$, jinak 0.

- Je-li φ sentence, tj. všechny její termy jsou **konstantní**, její hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e .
- Hodnota φ v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jejích (volných) proměnných.

Např. hodnota formule φ tvaru $x + 1 \leq 1$ ve struktuře $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1, \leq \rangle$ při ohodnocení e je $H_{at}^{\mathcal{N}}(\varphi)[e] = 1$ právě když $e(x) = 0$.

Hodnota formule

Hodnota $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je

$H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ pokud φ je atomická,

$$H^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = \neg_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \wedge \psi)[e] = \wedge_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \vee \psi)[e] = \vee_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \rightarrow \psi)[e] = \rightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi)[e] = \leftrightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$H^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde $\neg_1, \wedge_1, \vee_1, \rightarrow_1, \leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami a $e(x/a)$ pro $a \in A$ značí ohodnocení získané z e nastavením $e(x) = a$.

Pozorování $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ závisí pouze na ohodnocení *volných* proměnných ve φ .

Platnost při ohodnocení

Formule φ *je pravdivá (platí) ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e* , pokud $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$. Pak píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, v opačném případě $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$. Platí

$\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, pak $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$

Pozorování Necht' term t je *substituovatelný* za proměnnou x do formule φ a formule ψ je *varianta* φ . Pak pro každou strukturu $\mathcal{A}$ a ohodnocení e platí

- 1) $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro $a = t^{\mathcal{A}}[e]$,
- 2) $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$.

Platnost ve struktuře

Nechť φ je formule jazyka L a $\mathcal{A}$ je struktura pro L .

- φ je **pravdivá** (**platí**) **ve struktuře** $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow A$. V opačném případě píšeme $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

- φ je **lživá v** $\mathcal{A}$, pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ pro každé $e: \text{Var} \rightarrow A$.

- Pro každé formule φ, ψ , proměnnou x a strukturu $\mathcal{A}$ platí

$$(1) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \not\models \neg\varphi$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ a } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(3) \quad \mathcal{A} \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(4) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$$

- Je-li φ **sentence**, je φ pravdivá v $\mathcal{A}$ či lživá v $\mathcal{A}$ a tedy implikace (1) platí i obráceně. Je-li φ nebo ψ sentence, implikace (3) platí i obráceně.
- Z (4) plyne, že $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \psi$, kde ψ je **generální uzávěr** φ , tj. formule $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$, v níž $x_1, \dots, x_n$ jsou všechny volné proměnné φ .

Platnost v teorii a logická platnost

- **Teorie** jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie** T je L -struktura $\mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- **Třída modelů** teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je **pravdivá v T** (**platí v T**), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T . V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je **lživá v T** , pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T .
- Formule φ je **nezávislá v T** , pokud není pravdivá v T ani lživá v T .
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek** T je množina $\theta^L(T)$ všech **sentencí** jazyka L pravdivých v T , tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

Modely T jsou L -struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. **uspořádané množiny**, ve kterých platí axiomy T , např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$, neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$, je tedy nezávislá v T .
- Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, je tedy rovněž nezávislá v T . Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.
- Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je pravdivá v T , píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její **generální uzávěr**.