~ 4 domácí úkoly za celkem 35b.

↳ 2-3 týdny na řešení.

Na zápočet potřebuju $\underline{\lfloor 25b}$

– test v polovině semestru za 15b. $\boxed{\geq 42b}$ => 1 z zkoušky

$\max c^T x$

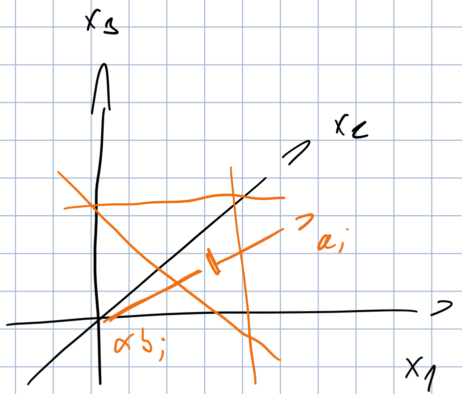
$Ax \leq b$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq b$

$x \geq 0$

$x \in \mathbb{N}^n$

$x \in \{0,1\}^n$



$\vec{a_i}^T \cdot \vec{x} = b_i$

nadrovina v prostoru proměnných

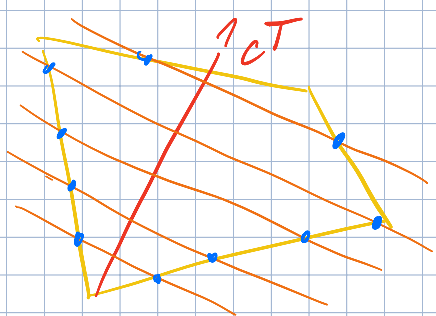
$\vec{a_i}^T \cdot \vec{x} \leq b_i$

pak je to poloprostor směrem k počátku.

Jak vypadá prostor řešení LP?

→ je to vždycky konvexní prostor (jenom pomocí podmínek ořezávám konvexní prostor, čímž ale vždycky zůstane konvexní)

Když mám $c^T x = u$, tak tu hodnotu neznám... ale



ty hodnoty reprezentují to u

a ty body na tom mnohostěnu jsou ty nejlepší řešení

↳ vždycky půjdu po bodech mnohostěnu ve směru toho vektoru c^T, čímž maximalizuju účelovou funkci.

Algoritmická teorie her – příklady na 1. cvičení*

3. října 2023

1 Lineární programování z rychlíku

Spousta praktických úloh i čistě kombinatorických lze naformulovat jako úloha lineárního programování (LP). Na úlohu LP můžeme použít známé metody a efektivně ji vyřešit. Každá úloha lineárního programování se dá převést do *kanonického tvaru* daného maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \\ \text{za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Příklad 1. *Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy.*

- *K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.*
- *Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.*
- *Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.*
- *Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.*

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéci? Zformulujte příslušnou úlohu LP.

Příklad 2. *Ukažte, jak lze:*

1. *Převést maximalizační úlohu LP na minimalizační a naopak.*
2. *Převést úlohu LP, která má všechny proměnné $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, na úlohu LP s proměnnými $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$ a naopak.*
3. *Převést úlohu LP s podmínkami ve tvaru nerovností na úlohu LP, jejíž podmínky jsou pouze rovnosti a naopak.*

Vyžadujeme-li celočíslenost proměnných, dají se lineárním programováním vyjádřit i NP-těžké úlohy. Bez této podmínky je vyřešení lineárního programování vyřešitelné v polynomiálním čase. V praxi se používá *simplexová metoda*, která v praxi funguje rychle, ale na umělých vstupech může běžet exponenciálně dlouho.

Příklad 3. *Zformulujte* Problém batohu *pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro n předmětů, kde i-tý má nějakou váhu v_i a cenu c_i, máme batoh s danou nosností V a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali celkovou cenu předmětů v batohu.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

1) Chci max $c^T x$, tedy x bude vektor s počtem chlebů, housek, baget a koblih,

c^T je cena jednotlivých produktů

b jsou zásoby surovin

A je matice podmínek

$c^T = (20, 2, 10, 7)$

$b^T = (5000g, 125 \text{ vajec}, 500g)$

$$A = \begin{pmatrix} 500g & 10v & 50g \\ 150g & 2v & 10g \\ 230g & 7v & 15g \\ 100g & 1v & 0g \end{pmatrix}$$

$Ax \le b$

$\downarrow$

to mi dává prostor řešení

$x \in \mathbb{N}^4$

2)

a) Převést maximalizační LP na minimalizační:

$$c'^T = -1 \cdot c^T$$

b) Převést úlohu LP, kde $\forall x \ge 0$, na $x' \in \mathbb{R}^m$ a naopak.

$$Ax \le b, \ x \ge 0 \ \to \ -x \le 0, \ x \in \mathbb{R}^m$$

$$\forall x \in \mathbb{R} = \underbrace{x^+ - x^-}$$

$$x^+, -x^- \ge 0$$

x může být reálné, ale protože $-x \le 0$, tak to bude jen pro $x \ge 0$...

c) Převést úlohu s nerovnostmi na úlohy s rovnostmi a naopak

Mám $Ax \le b \ \to \ Ax + z = b$

$$z \ge 0$$

3) Zformalizujte problém batohu:

$$x \in \{0, 1\}^m$$

$$\sum_i v_i x_i \leq V$$ → to co dokážu umístit

→ když mám n podmínek a m proměnných, tak duální program má m podmínek a n proměnných

2 Dualita

Mějme následující úlohu lineárního programování P s m proměnnými a n podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{P}$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s n proměnnými a m podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmínek } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{D}$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci n podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \ldots, y_n \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j-tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Příklad 4. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

2 9 10

$c = (6,4,2)$ $\quad b = (5,2,2)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$6x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 7$

$6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9$

y jsou pak samé jedničky

→ když všechny sečtu, dostanu účelovou fci.

Následující věta je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 1 (Silná věta o dualitě)**.** *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

(a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.

(b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.

(c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.

(d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Příklad 5. *Vytvořte duální program D pro následující primární lineární program P:*

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 & \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualita:

$$y^T A x \le y^T b \longrightarrow \text{proto } y^T \ge 0$$

$$x^T (A^T y) \ge x^T c \quad \longrightarrow \quad x^T \cdot c \le y^T \cdot b$$

takže

$$x^{*T} c = y^{*T} b$$

5) Převod P na D:

přepis programu P

$$\max \underbrace{(1,-2,0,3)}_{c^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b}$$

$x_2 \le 0$

$x_4 \ge 0$

$$\min \underbrace{(4, 0, 5)}_{b^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{y}$$

$y_1 \ge 0$

$y_2 \in \mathbb{R}$

$y_3 \le 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -6 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{y} \begin{matrix} = \\ \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{c}$$