

Algoritmická teorie her – příklady na 9. cvičení*

19. prosince 2022

1 Základy návrhu mechanismů

Aukce je *DSIC*, pokud splňuje následující dvě podmínky. Každý kupující má jako dominantní strategii *nabízet pravdivě*, tedy nastavení jeho nabídky b_i na svojí valuaci v_i . Navíc užitek každého kupujícího, který nabízí pravdivě, je nezáporný.

Theorem 1 (Myersonovo lemma). *V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.*

- (a) *Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.*
- (b) *Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).*
- (c) *Platební pravidlo p je určené následujícím vzorcem*

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i}) dz$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercise 1. *Uvažme 1-položkovou aukci s aspoň třemi kupujícími. Dokažte, že prodáním dražené položky kupujícímu s nejvyšší nabídkou za cenu, která se rovná třetí nejvyšší nabídce, dostaneme aukci, která není DSIC.*

Exercise 2. *Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuačí zatímco ostatním kupujícím naúčtuje 0.*

Exercise 3. *Dokažte, že alokační pravidlo x^G z Batochové aukce indukované hladovým (1/2)-aproximačním algoritmem je monotónní.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~sychrovsky/>

Theorem 1 (Myersonovo lemma). V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.

- (a) Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.
- (b) Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).
- (c) Platební pravidlo p je určeno následujícím vzorcem

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i}) dz$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercise 1. Uvažme 1-položkovou aukci s aspoň třemi kupujícími. Dokažte, že prodáním dražené položky kupujícímu s nejvyšší nabídkou za cenu, která se rovná třetí nejvyšší nabídce, dostaneme aukci, která není DSIC.

Let $n=3$ - vymyslí si případy stejně jako u Vickrey auction
- takže bude v rozporu s dominantní strategií

Mějme: $v_1 > v_2 > v_3 > \dots$

Uvňme: $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$

→ takže hráč může zvýšit svůj bid, aniž by tím
zvýšil je druhý je první

$$u_2 = \max(0, b_2 - b_3) = v_2 - v_3 > 0$$

$$v_2 > v_3$$

→ ta utility bude tím větší, čím víc bidne.

- takže 2 může zvýšit svůj bid, aby přehodil prvního

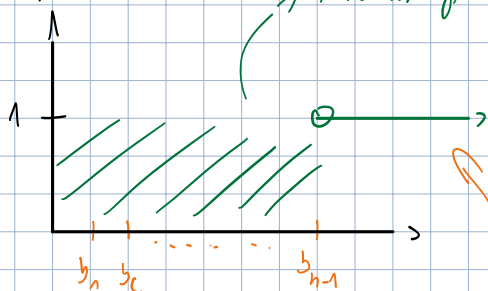
- Takže to rozhodně není DSIC

Exercise 2. Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuačí zatímco ostatním kupujícím naúčtuje 0.

$$X = \{ \{q_i\}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \}$$

splňuje DSIC $\Rightarrow$ je jediná

$x(2, b_{-i})$



Exercise 3. Dokažte, že alokační pravidlo x^G z Batožové aukce indukované hladovým (1/2)-aproximačním algoritmem je monotónní.

Když si je seřadím podle $\frac{b_i}{v_i}$, tak pokud zvýším bid,
tak moje šance, že alg. mi vybere, se zvětší, protože
v tom řazení posuneme dlevo.

Ještě se ale může stát, že se vybere jen jeden nejvyšší bidder,
a čeho se mi zvětší šance m výběr, když zvýším bid.