Algoritmická teorie her – příklady na 10. cvičení*

4. ledna 2024

1 Bulowova–Klempererova věta a více-parametrický mechanism design

Věta 1 (The Bulow–Klemperer Theorem)**.** *Nechť jsou $F = F_1 = \cdots = F_n$ regulární rozdělení pravděpodobnosti a buď n přirozené číslo. Potom platí následující nerovnost*

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[\mathrm{Rev}(VA_{n+1})\right] \geq \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_n\sim F}\left[\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})\right], \tag{1}$$

kde $\mathrm{Rev}(VA_{n+1})$ označuje zisk Vickreyho aukce VA_{n+1} s $n+1$ kupujícími (a žádnou rezervou) a $\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})$ značí zisk optimální aukce $OPT_{F,n}$ při F s n kupujícími.

Více-parametrický mechanism design označuje následující nastavení:

(a) n racionnálních účastníků (neboli kupujících),

(b) konečná množina Ω výstupů,

(c) každý kupující i má soukromé ohodnocení $v_i(\omega) \geq 0$ pro každý výstup $\omega \in \Omega$.

Každý kupující i odešle svou nabídku $b_i(\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$ a a nším cílem je navrhnout mechanismus, který zvolí výstup $\omega \in \Omega$ maximalizující *sociální přebytek* $\sum_{i=1}^n v_i(\omega)$.

Věta 2 (Vickrey–Clarke–Groves (VCG) mechanismus)**.** *V každém více-parametrickém mechanismu existuje DSIC mechanismus maximalizující sociální přebytek.*

Příklad 1. *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu VCG mechanismu je vždy nezáporné a shora omezené hodnotou $b_i(\omega^*)$. Neboli ukažte, že $0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$ pro každý vektor b nabídek, kde*

$$p_i(b) = \max_{\omega\in\Omega}\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega)\right\} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega^*)$$

a

$$\omega^* = \mathrm{argmax}_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(\omega).$$

Příklad 2. *Uvažte 3-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 and 2. Tři položky A, B a C jsou draženy najednou a každý kupující může dát nabídku na libovolnou podmnožinu položek. Ohodnocení kupujících pro jednotlivé podmnožiny položek jsou uvedeny v Tabulce 1. Jaký je výstup VCG aukce?*

bidder i	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i=1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i=2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Ohodnocení kupujících z Příkladu 2.

Neboli kteří kupující získají které položky a kolik každý zaplatí?

Příklad 3. *Uvažte 1-položkovou aukci s $n \geq 2$ kupujícími, kteří svá ohodnocení volí podle regulárního rozdělení pravděpodobnosti F. Dokažte, že střední hodnota zisku Vickreyho aukce bez rezervy je aspoň $\frac{n-1}{n}$-zlomek střední hodnoty zisku optimální aukce se stejným počtem n kupujícch.*

Nápověda: použijte Bulowovu–Klempererovu větu. Když přidáme jednoho kupujícího, o kolik může maximální střední hodnota zisku vzrůst?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/

Příklad 1. *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu VCG mechanismu je vždy nezáporné a shora omezené hodnotou $b_i(\omega^*)$. Neboli ukažte, že $0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$ pro každý vektor b nabídek, kde*

$$\overset{1.}{0 \leq} p_i(b) = \max_{\omega\in\Omega}\left\{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} b_j(\omega)\right\} - \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} b_j(\omega^*) \overset{2.}{\leq} b_i(w^*)$$

a

$$\omega^* = \text{argmax}_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(\omega).$$

1) ten $\max_{w\in\Omega}$ je alespoň tak velký jako člen vpravo, který obsahuje argmaxové w^*

2) $\underline{\max_{x\in\Omega}\left\{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} b_j(w)\right\}} \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}} b_j(w^*) = \underline{\max_{w\in\Omega}\left\{\sum_{j=1}^{n} b_j(w)\right\}}$

tady je nerovnost už vidět.

Předpokládáme DSIC, což garantuje, že bidy jsou nezáporné.

Příklad 2. *Uvažte 3-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 and 2. Tři položky A, B a C jsou draženy najednou a každý kupující může dát nabídku na libovolnou podmnožinu položek. Ohodnocení kupujících pro jednotlivé podmnožiny položek jsou uvedeny v Tabulce 1. Jaký je výstup VCG aukce?*

bidder i	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i=1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i=2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Ohodnocení kupujících z Příkladu 2.

Neboli kteří kupující získají které položky a kolik každý zaplatí?

$\beta(w_1, w_2) = \sum_i b_i(w_i)$

$\beta(\emptyset, \emptyset) = 0$

$\beta(ABC, \emptyset) = 50$

$$\left.\begin{aligned} v_1(A) + v_2(BC) &= 56 \\ v_1(AC) + v_2(B) &= 56 \end{aligned}\right\} \text{Nejvyšší dosažitelná částka}$$

tady jsme našli w^*

$p_1 = 47 - 18 = 29$

$p_2 = 50 - 38 = 12$

$= 41$

→ maximalizuji soc. surplus místo abych maximalizoval zisk z aukce.

$p_1 = 47 - 32 = 15$

$p_2 = 50 - 24 = 26$

$= 41$

Příklad 3. *Uvažte 1-položkovou aukci s $n \geq 2$ kupujícími, kteří svá ohodnocení volí podle regulárního rozdělení pravděpodobnosti F. Dokažte, že střední hodnota zisku Vickreyho aukce bez rezervy je aspoň $\frac{n-1}{n}$-zlomek střední hodnoty zisku optimální aukce se stejným počtem n kupujících.*

Nápověda: použijte Bulowovu–Klempererovu větu. Když přidáme jednoho kupujícího, o kolik může maximální střední hodnota zisku vzrůst?

předpoklady pro Bulow-Klemperera věta jsou splněny.

Tzn že chci ukázat, že

$$\mathbb{E}[Rev(VA_n)] \geq \frac{n-1}{n}\mathbb{E}[Rev(OPT_{F,n})]$$

víme

$$\mathbb{E}[Rev(VA_{n+1})] \geq \mathbb{E}[Rev(OPT_{F,n})]$$

$$RV_{n+1} \geq RO_n$$

tedy přidáním hráče se zvedne expected revenue o 1/n

$$RV_{n+1} \geq RO_n \geq RV_n, \quad \text{chci} \quad RV_n \geq \frac{n-1}{n} RO_n$$

hodilo by se:

$$RV_n = \frac{n-1}{n} \cdot RV_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot RV_{n+1}$$

Když přidám nového hráče, zajímá mě jeho valuation jen v případě, že je první nebo druhý jinak to hru neovlivní. Šance, že bude první, je 1/n. Lepší to bude udělat pro optimální hru:

$$RO_{n-1} \geq \frac{n-1}{n} RO_n = \left(1-\frac{1}{n}\right) RO_n$$

Hraju to jako bych n-tého hráče ignoroval (že nedostane nic)
Šance, že by item dostal, je pouze 1/n.
Takže celkovou revenue mi to sníží o právě 1/n původní.