Algoritmická teorie her – příklady na 2. cvičení*

10. října 2023

1 Nashova ekvilibria

Hra v normálním tvaru je trojicí (P, A, u), kde P je množina n *hráčů*, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ je množina *profilů akcí*, kde A_i označuje množinu *akcí* hráče i, a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ je n-ticí, ve které každé $u_i \colon A \to \mathbb{R}$ je *užitkovou funkcí* hráče i.

Množina *čistých strategií* hráče i je množinou A_i akcí hráče i. Množina S_i *smíšených strategií* hráče i je množinou pravděpodobnostních rozdělení na A_i. *Střední hodnotou užitkové funkce* hráče i na smíšeném strategickém profilu $s = (s_1, \ldots, s_n)$ je

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1,\ldots,a_n)\in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

→ pravděpodobnost, že hráč j zahraje akci a_j

Použijeme značení $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ a, pro strategii $s'_i \in S_i$ hráče i, použijeme $u_i(s'_i; s_{-i})$ k označení čísla $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Nejlepší odpovědí hráče i na strategický profil s_{-i} je smíšená strategie s^*_i taková, že $u_i(s^*_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i})$ pro každou strategii $s'_i \in S_i$. *Nashovým ekvilibriem* v G je strategický profil $(s_1, \ldots, s_n)$ takový, že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} pro každé $i \in P$.

Příklad 1. *Ověřte, že střední hodnota užitkové funkce ve hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je lineární. Neboli dokažte, že $u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i})$ pro každého hráče $i \in P$ a každý smíšený strategický profil $s = (s_1, \ldots, s_n)$.*

Příklad 2. *Spočítejte Nashova ekvilibria v následujících hrách:*

(a) *Vězňovo dilema,*

(b) *Kámen-nůžky-papír.*

Formálně dokažte, že žádná jiná ekvilibria v těchto hrách neexistují.

Příklad 3 (Iterovaně dominovaná ekvilibria)**.** *Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Pro každého hráče i řekneme, že strategie $s_i \in S_i$ je* ostře dominovaná *strategií $s'_i \in S_i$, pokud pro každé $s_{-i} \in S_{-i}$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) < u_i(s'_i; s_{-i})$. Uvažte následující iterovaný proces, který nám v některých hrách pomůže najít Nashovo ekvilibrium.*

Nastavme $A^0_i = A_i$ a $S^0_i = S_i$ pro každého hráče $i \in P$. Pro $t \geq 1$ and $i \in P$ buď A^t_i množina čistých strategií z A^{t-1}_i, které nejsou ostře dominovány strategií z S^{t-1}_i a buď S^t_i množina smíšených strategií, které mají support obsažený v A^t_i. Nechť T je prvním krokem, ve kterém se množiny A^T_i a S^T_i již nezmenšují pro žádného hráče $i \in P$. Má-li poté každý hráč $i \in P$ pouze jednu strategii $a_i \in A^T_i$, tak řekneme, že $a_1 \times \cdots \times a_n$ je iterovaně dominované ekvilibrium *hry G.*

(a) *Ukažte, že iterovaně dominované ekvilibrium je Nashovým ekvilibriem.*

(b) *Nalezněte příklad hry, která má čisté Nashovo ekvilibrium, které není iterovaně dominovaným ekvilibriem.*

Příklad 4. *Použijte metodu z Příkladu 3 k nalezení unikátního Nashova ekvilibria v následující hře dvou hráčů (viz Tabulka 1) zredukováním této hry na hru 2×2.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Strategická dominance: některou akci hráče odstraním, když vím, že je pro něj zbytečná a nezahraje ji. Pak ale taktéž odstraňuji i další a další, až zbyde jen jedna akce pro hráče a máme NE.

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	(5, 2)	(22, 4)	(4, 9)	(7, 6)
r_2	(16, 4)	(18, 5)	(1, 10)	(10, 2)
r_3	(15, 12)	(16, 9)	(18, 10)	(11, 3)
r_4	(9, 15)	(23, 9)	(11, 5)	(5, 13)

Tabulka 1: Hra z příkladu 4.

1)

Příklad 1. *Ověřte, že střední hodnota užitkové funkce ve hře $G=(P,A,u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je lineární. Neboli dokažte, že $u_i(s)=\sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i)u_i(a_i;s_{-i})$ pro každého hráče $i\in P$ a každý smíšený strategický profil $s=(s_1,\dots,s_n)$.*

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1,\dots,a_n)\in A} u_i(a)\prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

$$\sum_{a\in A} u_i(a)\cdot\prod_{j=1}^{n} s_j(a_j) = \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i)\cdot u_i(a_i, s_{-i})$$ to chceme potvrdit

$$= \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i)\cdot \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i,a_{-i})\cdot\prod_{j\in(1\dots n)/i} s_j(a_j)$$

tohle přesunu na konec

vektor, kde mi chybí i-tá položka

$$= \sum_{a_i\in A_i}\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i,a_{-i})\cdot\prod_{j=1}^{n} s_j(a_j)$$

$$= \sum_{a_i\in A_i} u_i(a)\cdot\prod_{j=1}^{n} s_j(a_j) \quad \boxtimes$$

2)

Příklad 2. *Spočítejte Nashova ekvilibria v následujících hrách:*

(a) *Vězňovo dilema,*

(b) *Kámen-nůžky-papír.*

Formálně dokažte, že žádná jiná ekvilibria v těchto hrách neexistují.

a)

	T	~~S~~
T	-2,-2	~~0,-3~~
~~S~~	~~-3,0~~	~~-1,-1~~

NE je zde pouze (T,T) ahoj.

pro horního hráče je vždycky lepší nepřiznat

pro levého hráče je taky vždycky lepší nepřiznat

mám jen jednu zbylou, ta bude NE

b)

① \ ②	K	N	P
K	0	1	-1
N	-1	0	1
P	1	-1	0

Uvažme strategii, co mírně preferuje kámen.

$S_1=(p,q,1-p-q)$, nechť $p>1/3$, $p>1-p-q$

$S_2=(0,0,1)$ chci nejvíc poškodit hráče 1

-> tímto vynásobím matici, dostanu $(-1,1,0)$, tohle $-p+q+0\dots$

$u(S_1,S_2) = -p+q<0$

- kdykoliv si vezmu nerovnoměrnou strategii, tak protihráč dostane zápornou utilitu, tohle mě bude porážet víc, než kdyby ahoj bylo uniformní rozdělení.

3)

Příklad 3 (Iterovaně dominovaná ekvilibria). *Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů. Pro každého hráče i řekneme, že strategie $s_i \in S_i$ je ostře* dominovaná *strategií $s'_i \in S_i$, pokud pro každé $s_{-i} \in S_{-i}$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) < u_i(s'_i; s_{-i})$. Uvažte následující iterovaný proces, který nám v některých hrách pomůže najít Nashovo ekvilibrium.*

Nastavme $A_i^0 = A_i$ a $S_i^0 = S_i$ pro každého hráče $i \in P$. Pro $t \geq 1$ and $i \in P$ buď A_i^t množina čistých strategií z A_i^{t-1}, které nejsou ostře dominovány strategií z S_i^{t-1} a buď S_i^t množina smíšených strategií, které mají support obsažený v A_i^t. Nechť T je prvním krokem, ve kterém se množiny A_i^T a S_i^T již nezmenšují pro žádného hráče $i \in P$. Má-li poté každý hráč $i \in P$ pouze jednu strategii $a_i \in A_i^T$, tak řekneme, že $a_1 \times \cdots \times a_n$ je iterovaně dominované ekvilibrium *hry G.*

(a) *Ukažte, že iterovaně dominované ekvilibrium je Nashovým ekvilibriem.*

(b) *Nalezněte příklad hry, která má čisté Nashovo ekvilibrium, které není iterovaně dominovaným ekvilibriem.*

a) NE: strategický profil $(s_1 - s_n)$, že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} $\forall i \in P$.

- iterovaní dominované ekv. mi dává pro každého hráče pouze jednu strategii. Zároveň ale uvádí „odhozené" strategie v iteracích byly horší nebo stejné jako ta poslední vybraná. Takže to určitě bude NE.

$\leftrightarrow$ to je případ, kdy mi zbyde jen jedna akce pro oba (viz. prisoners dilema)

b)

(2,1)	(0,0)
(0,0)	(1,2)

$\rightarrow$ tady nemůžu odřezat nic, protože žádná strategie není dominující

4) **Příklad 4.** *Použijte metodu z Příkladu 3 k nalezení unikátního Nashova ekvilibria v následující hře dvou hráčů (viz Tabulka 1) zredukováním této hry na hru 2×2.*

neexistuje tu žádná strategie $\rightarrow$ není striktně lepší než druhá.

Pokud hraju s $s = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, tak můžu zahodit c_2.

r_4 je potom už vždycky horší než r_3.

r_3 je vždycky lepší jak r_1.

c_4 taky je vždycky horší než c_1 i c_3

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	~~(5, 2)~~	~~(22, 4)~~	~~(4, 9)~~	~~(7, 6)~~
r_2	(16, 4)	~~(18, 5)~~	(1, 10)	~~(10, 2)~~
r_3	(15, 12)	~~(16, 9)~~	(18, 10)	~~(11, 3)~~
r_4	~~(9, 15)~~	~~(23, 9)~~	~~(11, 5)~~	~~(5, 13)~~

$u_1(r_4, c_1)$

$\leftrightarrow$ zbyly mi jen 4 striktně lepší strategie.