Algoritmická teorie her – příklady na 3. cvičení*

25. října 2023

1 Maticové hry

Maticová hra je hrou v normálním tvaru pro 2 hráče. Maticová hra je *nedegenerovaná*, pokud každý hráč má nanejvýš k nejlepších odpovědí na každou strategii s doménou velikosti k. *Maticová hra* s nulovým součtem je hra, kde užitek jednoho hráče se vždy rovná ztrátě druhého. U maticové hry $G = (\{1,2\}, A, u)$ s $A_1 = \{1,\dots,m\}$ a $A_2 = \{1,\dots,n\}$ používáme výplatní matice M a N, kde $(M)_{i,j} = u_1(i,j)$ a $(N)_{i,j} = u_2(i,j)$ pro všechna $i \in A_1$ and $j \in A_2$.

Na přednášce jsme si ukazovali následující algoritmus pro výpočet Nashových ekvilibrií nedegenerovaných maticových her.

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Input : Nedegenerovaná maticová hra G.
Output : Všechna Nashova ekvilibria hry G.
for každé $k \in \min\{m,n\}$ a dvojici domén (I,J) velikosti k

$$\begin{cases} \text{vyřešte systém rovností } (N^\top)_j x = v, (M)_i y = u, \sum_{i\in I} x_i = 1, \\ \sum_{j\in J} y_j = 1 \\ \text{pokud } x,y \geq \mathbf{0} \text{ a } u = \max\{(M)_k y\colon k \in A_1\}, v = \max\{(N^\top)_k x\colon k \in A_2\}, \\ \text{pak vraťte } (x,y) \text{ jako Nashovo ekvilibrium} \end{cases}$$

Příklad 1. *Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezeněte Nashovo ekvilibrium Hry na kuře s doménami velikosti 2.*

	Zatočit (1)	Jet rovně (2)
Zatočit (1)	(0,0)	(-1,1)
Jet rovně (2)	(1,-1)	(-10,-10)

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. *Rozhodněte, zda je tato hra degenerovaná a nalezeněte všechna Nashova ekvilibria této hry. Čím se množina všech ekvilibrií liší od dříve spočítaných příkladů?*

	Spolupracovat (1)	Odpálit bombu (2)
Spolupraovat (1)	(0,0)	(0,1)
Odpálit bombu (2)	(1,0)	(0,0)

Tabulka 2: Hra o duši Gothamu.

Příklad 3. *Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.*

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *a* $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 4. *Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.*

(a) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \dots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top My$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1$,	$\mathbf{1}x_0 \le M^\top x$.
	$y_1, \dots, y_n \ge 0$.	

(b) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \dots, y_n$	$x_0, x_1, \dots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1}y_0 - My \ge \mathbf{0}$,	$\mathbf{1}x_0 - M^\top x \le \mathbf{0}$,
	$\sum_{j=1}^n y_j = 1$,	$\sum_{i=1}^m x_i = 1$,
	$y_1, \dots, y_n \ge 0$.	$x_1, \dots, x_m \ge 0$.

Můřete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

Příklad 5. *Dokažte, že jsou-li (s_1, s_2) a (s_1', s_2') smíšená Nashova ekvilibria ve hře s nulovým součtem, tak potom jsou jimi i profily (s_1, s_2') a (s_1', s_2).*

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\le$	$y_i \ge 0$
	$\ge$	$y_i \le 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \ge 0$	j-tá podmínka má $\ge$
	$x_j \le 0$	$\le$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Příklad 1. *Použijte algoritmus Support enumeration z přednášky a nalezeněte Nashovo ekvilibrium Hry na kuře s doménami velikosti 2.*

N

M	Zatočit (1)	Jet rovně (2)
Zatočit (1)	(0,0)	(-1,1)
Jet rovně (2)	(1,-1)	(-10,-10)

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Input : Nedegenerovaná maticová hra G.
Output : Všechna Nashova ekvilibria hry G.
for každé $k \in \min\{m,n\}$ a dvojici domén (I,J) velikosti k
- vyřešte systém rovností $(N^\top)_j x = v, (M)_i y = u, \sum_{i\in I} x_i = 1, \sum_{j\in J} y_j = 1$
- pokud $x, y \geq \mathbf{0}$ a $u = \max\{(M)_k y \colon k \in A_1\}, v = \max\{(N^\top)_k x \colon k \in A_2\}$, pak vraťte (x,y) jako Nashovo ekvilibrium

---

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$k = 2$

$0x_1 + -1x_2 = v \quad \to v = -x_2$

$1x_1 - 10x_2 = v \quad \to \boxed{x_1 = 9x_2}$

$x_1 + x_2 = 10x_2 = 1 \to x_2 = \frac{1}{10}$

$x_1 = \frac{9}{10}$

$0y_1 + -1y_2 = u \quad \to u = -y_2$

$+1y_1 + -10y^2 = u \quad \to \boxed{y_1 = 9y^2}$

$y_1 + y_2 = 10y^2 = 1 \to y_2 = \frac{1}{10}$

$y_1 = \frac{9}{10}$

$k = 1$

Reálně jen porovnáním ty jednotlivé hodnoty.

(0,0) – není NE

(-10,-10) – není NE

(1,-1), (-1,1) – jsou NE

Příklad 2. *Rozhodněte, zda je tato hra degenerovaná a nalezeněte všechna Nashova ekvilibria této hry. Čím se množina všech ekvilibrií liší od dříve spočítaných příkladů?*

R

C	Spolupracovat (1)	Odpálit bombu (2)
Spolupraovat (1)	(0,0)	(0,1)
Odpálit bombu (2)	(1,0)	(0,0)

pokud R hraje OB,

mám dvě Best Response S, OB

↳ pro k=1 mám 2 odpovědi

tím pádem C může hrát strategii s libovolným poměrem S, OB, tedy je jich nekonečně mnoho

Příklad 3. *Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.*

(a) $M = \begin{pmatrix} \cancel{0} & 4 & 1 \\ \cancel{2} & 2 & 4 \\ \cancel{3} & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{0} & 3 & 4 \\ \cancel{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pro $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pak $u_2 = x^T \cdot N \cdot y = (0\ 1\ 1)\, y$

pure strategie $\to$ víc responsí na ní !

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

v důsledku toho se to škrtne i u druhého hráče!

Příklad 4. *Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.*

(a) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P	Program D
Proměnné	$y_1, \ldots, y_n$	x_0
Účelová funkce	$\min x^\top M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1$,	$\mathbf{1} x_0 \le M^\top x$.
	$y_1, \ldots, y_n \ge 0$.	

(b) *Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P'	Program D'
Proměnné	$y_0, y_1, \ldots, y_n$	$x_0, x_1, \ldots, x_m$
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1} y_0 - M y \ge \mathbf{0}$,	$\mathbf{1} x_0 - M^\top x \le \mathbf{0}$,
	$\sum_{j=1}^n y_j = 1$,	$\sum_{i=1}^m x_i = 1$,
	$y_1, \ldots, y_n \ge 0$.	$x_1, \ldots, x_m \ge 0$.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i-tá podmínka má $\le$	$y_i \ge 0$
	$\ge$	$y_i \le 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \ge 0$	j-tá podmínka má $\ge$
	$x_j \le 0$	$\le$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

$P =$

$y_1 - y_n$

$\min(x^T M y)$ $\quad A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\sum_j^n y_j = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y^T$

$y_1 - y_n \ge 0$

$D =$

pouze 1 podm. $\to x_0$

$\max(1 \cdot x_0)$ $\quad y^T = (1) \cdot x_0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_0 \le (x^T M)^T = M^T x$

$x_0 \in \mathbb{R}$

jelikož maximalizujeme, tak by bylo hrozně jednoduché si vzít libovolně velký x_0. Takže proto ho musím omezit.

$P' =$

$y_1 - y_n$

$\min y_0$

$1 y_0 - M y \ge 0,$

$1 y = 1$

$y_1 - y_n \ge 0$

$D' =$

$x_0 - x_m$

$\max\left((1, 0, \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \max(x_0)$

$1 x_0 - M^T x \le 0$

$1^T x = 1$

$x_1 - x_m \ge 0$

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & -M \\ 1 & \end{pmatrix}$

– to druhé bylo celkem z rychlíku, ale což