Algoritmická teorie her – příklady na 4. cvičení*

1. listopadu 2023

1 Lemkeho–Howsonův algoritmus

Polyedr nejlepších odpovědí hráče 1 v maticové hře $G = (\{1,2\}, A, u)$ s výplatními maticemi M a N je polyedrem

$$\overline{P} = \{(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \colon x \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top x = 1, N^\top x \leq \mathbf{1}v\}.$$

Pro hráče 2 se jedná o polyedr

$$\overline{Q} = \{(y,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon y \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top y = 1, My \leq \mathbf{1}u\}.$$

Bod (x,v) polyedru $\overline{P}$ má *značku* $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $x_i = 0$ nebo pokud $i \in A_2$ a $(N^\top)_i x = v$. Bod (y,u) polyedru $\overline{Q}$ má značku $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $(M)_i y = u$ nebo pokud $i \in A_2$ a $y_i = 0$.

Pro nezáporné matice M a N, které nemají nulový sloupec, je *normalizovaným polytopem nelepších odpovědí* pro hráče 1 polytop

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x \geq \mathbf{0}, N^\top x \leq \mathbf{1}\}.$$

Pro hráče 2 se jedná o polytop

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y \geq \mathbf{0}, My \leq \mathbf{1}\}.$$

Značky v P a Q jsou definovány analogicky jako u $\overline{P}$ a $\overline{Q}$.

Nashova ekvilibria u nedegenerované hry odpovídají párům vrcholů z $P \times Q \setminus \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$, které mají všechny značky.

Příklad 1. *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru na kuře. Poté v daných polyedrech nalezněte páry vrcholů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.*

	Zatočit (3)	Jet rovně (4)
Zatočit (1)	$(10,10)$	$(9,11)$
Jet rovně (2)	$(11,9)$	$(0,0)$

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashova ekvilibria následující hry dvou hráčů:*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{and} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výpočet začněte výběrem značky 2.

Graf konfigurací má vrcholy tvořené páry (x,y) vrcholů z $P \times Q$, které jsou *k-téměř plně označené*, neboli každá značka z $A_1 \cup A_2 \setminus \{k\}$ je značkou buď bodu x nebo y. Vrcholy (x,y) a (x',y') tvoří hranu, pokud buď $x = x'$ a yy' je hranou Q nebo pokud xx' je hranou P a $y = y'$.

Příklad 3. *Dokažte, že Lemkeho–Howsonův algoritmus neskončí ve vrcholech tvaru* $(x,\mathbf{0})$ *či* $(\mathbf{0},y)$ *v grafu konfigurací.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

1)

Příklad 1. *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru na kuře. Poté v daných polyedrech nalezněte páry vrcholů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.*

	Zatočit (3)	Jet rovně (4)
Zatočit (1)	$(10, 10)$	$(9, 11)$
Jet rovně (2)	$(11, 9)$	$(0, 0)$

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^T = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{Q} \sim \bar{P}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ $\qquad$ $y_1, y_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$ $\qquad$ $y_1 + y_2 = 1$

$10x_1 + 9x_2 \leq v$ $\qquad$ $10y_1 + 9y_2 \leq u$

$11x_1 + 0x_2 \leq v$ $\qquad$ $11y_1 + 0y_2 \leq u$

tohle nikdy nemůže být nula, jinak by byl v matici nulový řádek

$x_1' = \frac{x_1}{v}$, $x_2' = \frac{x_2}{v}$, $x_1' + x_2' = \frac{1}{v}$

$10x_1' + 9x_2' \leq 1$

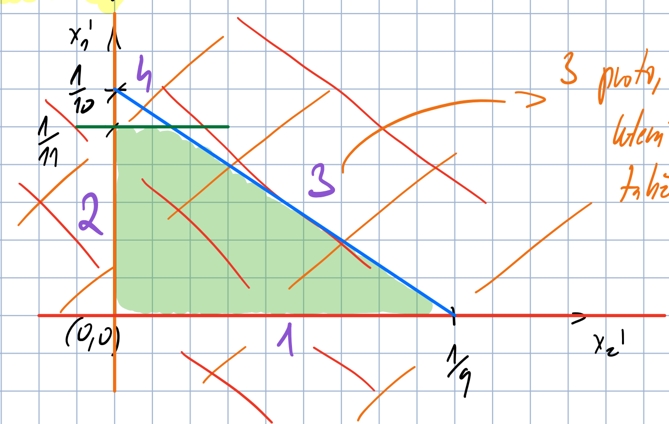
$11x_1' \leq 1$

$x_1' \geq 0$

$x_2' \geq 0$

P

1, 2, 3, 4 $\approx$ x_1 x_2 y_1 y_2

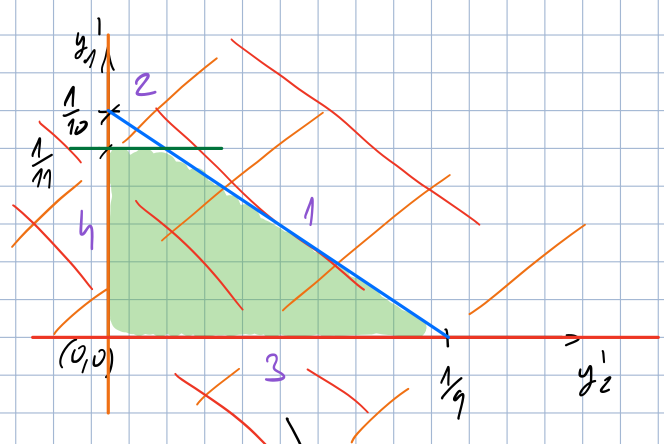


3 proto, že to je podmínka 1, která je v matici na prvním sloupci, takže pak bude vynásobena první položkou soupeřova akčního profilu

$$(y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

3 4

Q



když je y_1' 0, tak jsem po násobení matice dostal 3.

$$10x_1' + 9x_2' \le 1 \;\longrightarrow\; 10x_1' + 9x_2' + s_1 = 1$$

$$11x_1' \le 1 \;\longrightarrow\; 11x_1' + s_2 = 1$$

$$10y_1' + 9y_2' \le 1 \;\longrightarrow\; 10y_1' + 9y_2' + s_3 = 1$$

$$11y_1' \le 1 \;\longrightarrow\; 11y_1' + s_4 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$Ax \le b$$

$$Ax + s = b$$

$$s \ge 0$$

$$s_1 = 1 - 10x_1 - 9x_2$$

$$s_2 = 1 - 11x_1$$

$$s_3 = 1 - 10y_1 - 9y_2$$

$$s_4 = 1 - 11y_1$$

$$x_2 = \frac{1}{9}\left(1 - 10x_1 - s_1\right)$$

→ a aby tohle bylo 0 (protože to tak je v polyedru), musí být $x_2 = 1/9$

$$y_1 = \frac{1}{10}\left(1 - 9y_2 - s_3\right)$$

→ já musím zůstat na první podmínce, abych neutekl z toho polyedru.

$$\cancel{s_4 = 1 - \frac{11}{10}\left(1 - 9y_2 - s_3\right)}$$

$$\cancel{= -\frac{1}{10} - \dots}$$

→ tohle potřebuji ale ≥ 0, tak to vyjádřím z druhého vztahu

$$y_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{11}s_4$$

$$s_3 = \frac{1}{11} - \dots$$

3) **Příklad 3.** *Dokažte, že Lemkeho–Howsonův algoritmus neskončí ve vrcholech tvaru* $(x, \mathbf{0})$ *či* $(\mathbf{0}, y)$ *v grafu konfigurací.*

$$\cancel{X_a = 0}$$

→ x zjevně není 0.

$$\cancel{(My)} = 1$$

→ $y = 0$