37% na začátku.

Algoritmická teorie her – příklady na 5. cvičení*

14. listopadu 2022

1 ε-Nashova a korelovaná ekvilibria

Nechť $G = (P, A, u)$ je hra v normálním tvaru pro n hráčů a mějme $\varepsilon > 0$. Strategický profil $s = (s_1, \dots, s_n)$ je *ε-Nashovým ekvilibriem*, pokud pro každého hráče $i \in P$ a každou strategii $s'_i \in S_i$ máme $u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(s'_i; s_{-i}) - \varepsilon$.

Nechť p je rozdělení pravděpodobnosti na A, neboli $p(a) \geq 0$ pro každé $a \in A$ a $\sum_{a \in A} p(a) = 1$. Rozdělení p je *korelovaným ekvilibriem* v G, pokud platí

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a'_i; a_{-i}) p(a_i; a_{-i})$$

pro každého hráče $i \in P$ a všechny čisté strategie $a_i, a'_i \in A_i$.

Příklad 1. *Ukažte, že v každé hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je každá konvexní kombinace korelovaných ekvilibrií opět korelovaným ekvilibriem.*

Příklad 2. *Nechť je $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 1.*

	L	R
U	(1,1)	(0,0)
D	$(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1)$	(500,500)

Tabulka 1: Hra z Příkladu 2.

Ukažte, že zde je ε-Nashovo ekvilibrium s takové, že $u_i(s') > 10u_i(s)$ pro každé $i \in P$ a každé Nashovo ekvilibrium s' v G. Jinak řečeno, existují hry, ve kterých jsou některá ε-Nashova ekvilibria daleko od všech Nashových ekvilibrií.

Příklad 3. *Spočítejte všechna korelovaná ekvilibria ve hře Vězňovo dilema.*

	T	S
T	(-2,-2)	(0,-3)
S	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 2: Hra z příkladu 3

Příklad 4. *Nechť je $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 3.*

	L	R
U	(6,6)	(2,7)
D	(7,2)	(0,0)

Tabulka 3: Hra z Příkladu 4.

(a) *Spočítejte všechna Nashova ekvilibria v G a nakreslete konvexní obal výplat Nashových ekvilibrií.*

(b) *Existuje korelované ekvilibrium v G (pro nějaké rozdělení p), které dává výplatu mimo daný konvexní obal?*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 1. *Ukažte, že v každé hře $G = (P, A, u)$ v normálním tvaru pro n hráčů je každá konvexní kombinace korelovaných ekvilibrií opět korelovaným ekvilibriem.*

Mějme $p, q \in \{$„korelovaná ekvilibria"$\}$.

Pro ně platí:

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\, p(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i})\, p(a_i, a_{-i})$$

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\, q(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i})\, q(a_i, a_{-i})$$

Uvažme nyní r jako konvexní kombinaci:

$$r = \alpha \cdot p + (1-\alpha)\beta, \quad \alpha \in [0,1]$$

→ půjdu čistě od jedné do čistě druhé

Musí platit:

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\, r(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i})\, r(a_i, a_{-i})$$

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\big(\alpha \cdot p(a_i, a_{-i}) + (1-\alpha)\cdot q(a_i, a_{-i})\big) \geq \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i})\big(\alpha \cdot p(a_i, a_{-i}) + (1-\alpha)\cdot q(a_i, a_{-i})\big)$$

$$\Vert$$

$$\underline{\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot \alpha \cdot p(a_i, a_{-i})} + \underline{\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot (1-\alpha)\, p(a_i, _{-i})} \geq \underline{\underline{\quad}} + \underline{\underline{\quad}}$$

pouze nesmí být α i $(1-\alpha)$ kladné, aby ty nerovnice furt platily.

Příklad 2. *Nechť je $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou* 1.

	L	R
~~U~~	~~(1,1)~~	~~(0,0)~~
D	$(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1)$	(500,500)

NE

je to jediné NE díky pure dominované strategii

Tabulka 1: Hra z Příkladu 2.

Ukažte, že zde je ε-Nashovo ekvilibrium s takové, že $u_i(s') > 10u_i(s)$ pro každé $i \in P$ a každé Nashovo ekvilibrium s' v G. Jinak řečeno, existují hry, ve kterých jsou některá ε-Nashova ekvilibria daleko od všech Nashových ekvilibrií.

Horní hráč preferuje L před R při tahu U, který je nyní možný, protože $1 \geq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) - \varepsilon$, tudíž není dominován očima toho hráče vlevo.

Příklad 3. *Spočítejte všechna korelovaná ekvilibria ve hře Vězňovo dilema.*

	T	S
T	(-2,-2)	(0,-3)
S	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 2: Hra z příkladu 3

$$P(T,T) \geq 0$$

$$\sum_{a \in A} p(a) = 1$$

$$u_1(T,T) \cdot P(T,T) + u_1(T,S) \cdot P(T,S) \geq u_1(S,T) \cdot P(T,T) + u_1(S,S) \cdot P(S,T)$$

$$-2 \cdot P(T,T) \geq -3P(T,T) - P(T,S)$$

$$-3 \cdot P(S,T) - P(S,S) \geq -2 \cdot P(S,T)$$

$$-2 \cdot P(T,T) \geq -3 \cdot P(T,T) - P(S,T)$$

$$-3 \cdot P(T,S) - P(S,S) \geq -2 \cdot P(T,S)$$

tohle jsou ty „jiné/druhé" akce.

$$-P(T,T) - P(T,S) \leq 0$$

$$-\underset{=0}{P(S,T)} - \underset{=0}{P(S,S)} \geq 0$$

$$-P(T,T) - P(S,T) \leq 0$$

$$-\underset{=0}{P(T,S)} - \underset{=0}{P(S,S)} \geq 0$$

$$P(\_,\_) \in [0,1]$$

$$\Rightarrow P(T,T) = 1$$

Příklad 4. *Nechť je* $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ *hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde* $A_1 = \{U, D\}$ *a* $A_2 = \{L, R\}$ *s výplatní funkcí* u *určenou Tabulkou* 3.

	L	R
U	(6,6)	(2,7)
D	(7,2)	(0,0)

Tabulka 3: Hra z Příkladu 4.

-> tohle je vlastně game of chicken

(a) *Spočítejte všechna Nashova ekvilibria v* G *a nakreslete konvexní obal výplat Nashových ekvilibrií.*

(b) *Existuje korelované ekvilibrium v* G *(pro nějaké rozdělení* p*), které dává výplatu mimo daný konvexní obal?*

2 NE jsou pure, pak existuje ještě jedno mixed NE:

$$\overset{6p}{} \quad \overset{-2p+2}{}$$

$$u: \; p\cdot 6 + 2(1-p)$$

$$d = 7p$$

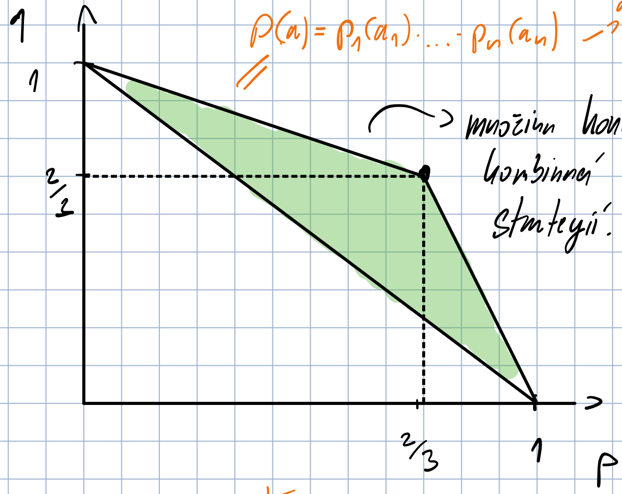
$$6p\cdot q \quad (-2p+2)\cdot q \quad 7p\cdot(1-q)$$

$$u_1 = 6pq + 2q - 2pq + 7p - 7pq = -3pq + 7p + 2q$$

$$\frac{du_1}{dq} = -3p + 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

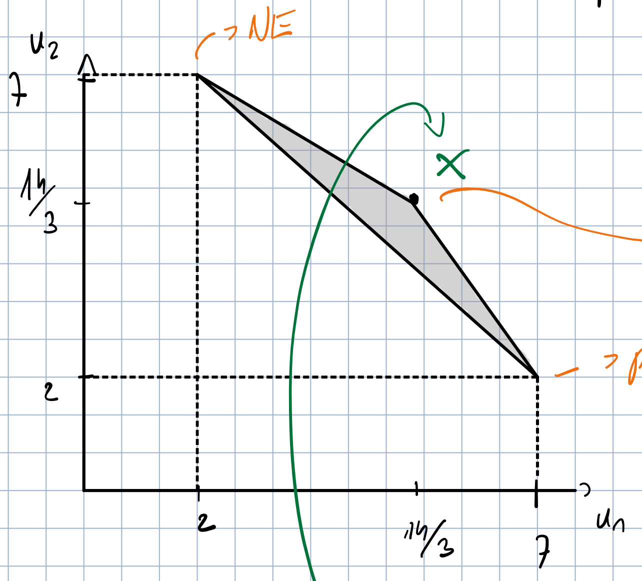
$P(a) = P_1(a_1)\cdot\ldots\cdot P_n(a_n)$ -> a tohle je NASH

//



-> množina konvexních kombinací daných strategií.

-> NE jsou korelovaná ekv., tedy i všechny ty kombinace budou korelovaná ekvilibria



-> pevný body NE

$$\overset{24/9}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 6} + \overset{4/9}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}2} + \overset{14/9}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 7} = \frac{24}{9} + \frac{18}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

-> dopočítám u pro $(2/3, 2/3)$

tohle je jedno korelované

	L	R
U	(6,6)	(2,7)
D	(7,2)	~~(0,0)~~

tohle uniformní rozdělení nás dostane mimo tohle těleso.