Algoritmická teorie her — 1. domácí úkol[1]
Nashova ekvilibria

zadáno 12.10.2023, termín odevzdání 31.10.2023

Řešení odevzdávejte pomocí Sovičky.

Příklad 1. *Spočítejte Nashova ekvilibria ve Hře na kuře a formálně dokažte, že žádná jiná Nashova ekvilibria v této hře neexistují.* **[2]**

Příklad 2. *Zhlédněte scénu z filmu Čistá duše (A Beautiful Mind), kde John Nash hraný Russellem Crowem vysvětluje pojem Nashova ekvilibria. Předpokládejme, že daná situace je modelována hrou čtyř hráčů (muži), kde každý má pět možných akcí (ženy). Vysvětlete, proč řešení navržené ve filmu není Nashovým ekvilibriem.* **[1]**

Příklad 3. *Na ulici se nachází $n \geq 2$ lidí, kteří si všichni všimnou zraněného muže. Každý z těchto lidí má k dispozici dvě akce: buď muži pomůže či ne. Pokud nikdo nepomůže, pak všichni dostanou výplatu* 0. *Pokud někdo pomůže, pak všichni dostanou výplatu* 1 *kromě jedinců, kteří se rozhodli pomoci, ti získají výplatu* $1 - c$ *pro nějaké* $c \in (0, 1)$. *Nalezněte* symetrické Nashovo ekvilibrium *této hry, neboli Nashovo ekvilibrium, ve kterém všichni hráči používají tutéž strategii. Jaká je potom pravděpodobnost, že muži někdo pomůže? Je pro muže lepší mít okolo více svědků?* **[3]**

Příklad 4. *Uvažme hru dvou hráčů, ve které si každý hráč vybírá nezáporné číslo velikosti nanejvýš 1000. Hráč* 1 *si vybírá sudá čísla, hráč* 2 *si vybírá lichá čísla. Poté, co hráči oznámí své číslo, hráč, který si vybral nižší číslo, vyhrává tolik korun, kolik je hodnota jím vybraného čísla. Druhý hráč nezíská nic. Nalezněte všechna čistá Nashova ekvilibria této hry.* **[2]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

1) Hra na kuře:

Def:

	T	S
T	0, 0	-1, 1
S	1, -1	-10, -10

T = turn

S = stay

Příklad: Spočtěte NE a dokažte, že jiné neexistují.

Tah: $\longrightarrow$ Best response

Best response vzhledem k protihráči:

T $\longrightarrow$ S

S $\longrightarrow$ T

T $\longrightarrow$ S

S $\longrightarrow$ T

tedy následovně:

	T	S
T	0, 0	-1, 1
S	1, -1	-10, -10

Logickým rozborem případů zjišťujeme, že existují dvě pure strategy NE.

Nyní ještě ověříme, zdali neexistuje fully mixed NE. (pokud hra není degenerovaná, musí obsahovat 3)

Uvažme, že $s_1(T) = p$ a $s_2(S) = 1-p$, obdobně $s_2(T) = q$ a $s_2(S) = 1-q$, tedy oba hráči s danou pravděpodobností zahrají tah T a se zbylou pravděpodobností tah S.

Tedy payoff modrého hráče je: $u_1(T, s_{-1}) = q \cdot (T,T) + (1-q)\cdot(T,S) = q-1$

$$u_2(S, s_{-1}) = q \cdot (S,T) + (1-q)\cdot(S,S) = q - 10 + 10q$$

Tudíž $u_1(s) = p \cdot u_1(T, s_{-1}) + (1-p)\cdot u_1(S, s_{-1}) = \underline{p\cdot(q-1) + (1-p)\cdot(11q-10)}$

$= pq - p + 11q - 10 - 11pq + 10p = -10pq + 9p + 11q - 10 = p\cdot(-10q+9) + 11q - 10$

$\Leftrightarrow$ ta je rostoucí v p, pokud $(-10q+9) > 0 \Rightarrow q < \frac{9}{10}$ $\rightarrow$ pak hráč jedna vždy hraje T $(p=1)$ $\rightarrow$ aby maximalizoval výhru.

klesající v p, pokud $(-10q+9) < 0 \Rightarrow q > \frac{9}{10}$ $\rightarrow$ pak hráč jedna vždy hraje S $(p=0)$ $\rightarrow$ aby minimalizoval prohru.

V případě, že $-10q + 9 = 0$, tedy $q = \frac{9}{10}$, tak nezáleží na hodnotě p, tedy může zvolit cokoliv.

Jelikož je payoff matice symetrická, tak analogickým postupem získáme stejný výsledek pro červeného hráče se stejnými hodnotami.

Celkem jsme tak našli tři NE: $(p,q) = \left\{(T,S), (S,T), \left(\frac{9}{10}T + \frac{1}{10}S, \frac{9}{10}T + \frac{1}{10}S\right)\right\}$

4)

Příklad 4. *Uvažme hru dvou hráčů, ve které si každý hráč vybírá nezáporné číslo velikosti nanejvýš 1000. Hráč 1 si vybírá sudá čísla, hráč 2 si vybírá lichá čísla. Poté, co hráči oznámí své číslo, hráč, který si vybral nižší číslo, vyhrává tolik korun, kolik je hodnota jím vybraného čísla. Druhý hráč nezíská nic. Nalezněte všechna čistá Nashova ekvilibria této hry.* [2]

Pokusíme se najít NE pomocí iterovaní dominované strategie.
Uvažme výchozí tah 2. hráče jako jeho největší možné číslo: 1000. S touto vědomostí by byla 1. hráče Best Response 999. Tuto strategii dominuje 998, 997.
Postupně tedy dostáváme:

- (999, 1000)
- (997, 998)
- (995, 996)
- ⋮
- (3, 4)
- (1, 2)
- (1, 0)

→ Poslední dvě strategie již nejsou pro hráče 2 dominovány žádnou další strategií (všechny ostatní byly vyloučeny). Pro hráče 1 existuje dokonce jen jedna strategie, která není dále dominována.

Dvě zmíněné strategie jsou zároveň NE. Důkaz: Žádné jiné zmíněné to být nemohou, protože jsme je postupným iterováním dominovali jinými strategiemi. Poslední dvě už nejsou dále dominovány a můžeme nahlédnout, že obě splňují definici NE: tedy že i při znalosti soupeřovi strategie již neexistuje lepší strategie. Hráč, co zahraje „1", již ani nemá nižší číslo a neexistuje tah jiný (lepší) nedominovaný tah než „1", zatímco druhý hráč může hrát „0" nebo „2" a v obou případech získá 0.
Jelikož zároveň nejde o zero-sum game, tah hráče, co si vybírá mezi 0 a 2, nemá motivaci si vybrat „0", aby nedal bod ani soupeři.

Příklad 3. *Na ulici se nachází $n \geq 2$ lidí, kteří si všichni všimnou zraněného muže. Každý z těchto lidí má k dispozici dvě akce: buď muži pomůže či ne. Pokud nikdo nepomůže, pak všichni dostanou výplatu* 0. *Pokud někdo pomůže, pak všichni dostanou výplatu* 1 *kromě jedinců, kteří se rozhodli pomoci, ti získají výplatu* $1 - c$ *pro nějaké* $c \in (0,1)$. *Nalezněte* symetrické Nashovo ekvilibrium *této hry, neboli Nashovo ekvilibrium, ve kterém všichni hráči používají tutéž strategii. Jaká je potom pravděpodobnost, že muži někdo pomůže? Je pro muže lepší mít okolo více svědků?* **[3]**

P N

Hledáme NE se společnou strategií, tedy každý hráč má strategii $(p, 1-p)$.

Uvažme podle definice:

$$u_i(s) = p \cdot u_i(P, S_{-i}) + (1-p) \cdot u_i(N, S_{-i}) \qquad p \in \langle 0,1 \rangle$$

$u_i(P, S_{-i}) = (1-c)$ → pokud pomůžu, tak nehledě na ostatních mám jasný payoff

$u_i(N, S_{-i}) = 0 \cdot \underbrace{(1-q)^{n-1}}_{\text{ani nikdo jiný nepomohl}} + 1 \cdot (\underbrace{1-(1-q)^{n-1}}_{\text{alespoň jeden člověk pomohl}})$

$q :=$ pravděpodobnost ostatních hráčů, že pomůžou

$q \in \langle 0,1 \rangle$

Dosadím-li:

$$u_i(s) = p \cdot (1-c) + (1-p) \cdot (1-(1-q)^{n-1})$$
$$= \cancel{p} - pc + 1 - (1-q)^{n-1} - \cancel{p} + p \cdot (1-q)^{n-1}$$
$$= 1 \underline{- pc + (p-1) \cdot (1-q)^{n-1}}$$

→ nyní hledám minimum této části funkce, což ve výsledku maximalizuje zisk.

*wolframAlpha

$$\frac{\partial}{\partial p} -pc + (p-1) \cdot (1-q)^{n-1} \overset{*}{=} -\frac{cq - c + (1-q)^n}{(q-1)} \text{ s kořenem v } q = 1 - \sqrt[n-1]{c}$$

Tzn. že minimum se nachází v bodě $q = 1 - \sqrt[n-1]{c}$ a tedy vůbec nezáleží na volbě i-tého hráče.

Jelikož všichni hráči chtějí maximalizovat svůj payoff a zároveň všichni mají mít stejnou strategii, budou hráči „pomáhat" s pravděpodobností $p = 1 - \sqrt[n-1]{c}$ a díky existenci jediného minima derivace utility function půjde o NE, jelikož neexistuje akce, která by i-tému hráči vrátila větší payoff, a to platí pro všechny hráče.

Příklad 2. *Zhlédněte scénu z filmu Čistá duše (A Beautiful Mind), kde John Nash hraný Russellem Crowem vysvětluje pojem Nashova ekvilibria. Předpokládejme, že daná situace je modelována hrou čtyř hráčů (muži), kde každý má pět možných akcí (ženy). Vysvětlete, proč řešení navržené ve filmu není Nashovým ekvilibriem.* [1]

Pokud jsem úlohu pochopil správně, blondýna na baru měla vyšší hodnotu než ostatní ženy.
Můžeme to tedy reprezentovat tak, že utility („ulovil jsem blondýnu") = 2, zatímco
utility („ulovil jsem jinou slečnu než blondýnu") = 1. Russell Crowe pak říká,
že pro muže je lepší si každý jít za jednou jinou a všichni něco dostanou než když všichni šli za blondýnou.
Uvážíme-li ale strategii, že každý muž si vezme neblondýnu, pak pro i-tého hráče,
vzhledem ke strategii s_{-i} existuje lepší akce než si „ulovit neblondýnu" a to
„ulovit blondýnu", což má větší payoff. Jelikož je tedy Russelova strategie
ostře dominovaná jinou strategií, tak rozhodně nepůjde o NE. → v rozporu s definicí.