Algoritmická teorie her — 2. domácí úkol[1]
Nashova ekvilibria

zadáno 1.11.2023, termín odevzdání 16.11.2023

Příklad 1. *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru o duši Gothamu. Poté v daných polyedrech nalezněte páry bodů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.* **[4]**

	Spolupracovat (3)	Odpálit bombu (4)
Spolupracovat (1)	$(1,1)$	$(1,2)$
Odpálit bombu (2)	$(2,1)$	$(1,1)$

Tabulka 1: Hra o duši Gothamu.

Příklad 2. *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashovo ekvilibrium následující hry dvou hráčů:* **[2]**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix}$$

Výpočet začněte výběrem značky 1.

Příklad 3. *[Spernerovo lemma] Nechť S je podrozdělení trojúhelníku T v rovině.* Korektní obarvení *vrcholů S přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z S tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z T. Navíc každý vrchol z S ležící na hraně z T musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v T.*

Dokažte, že v každém korektním obarvení S existuje trojúhelníková stěna v S jejiž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Hint: Použijte redukci na problém END-OF-THE-LINE. **[3]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

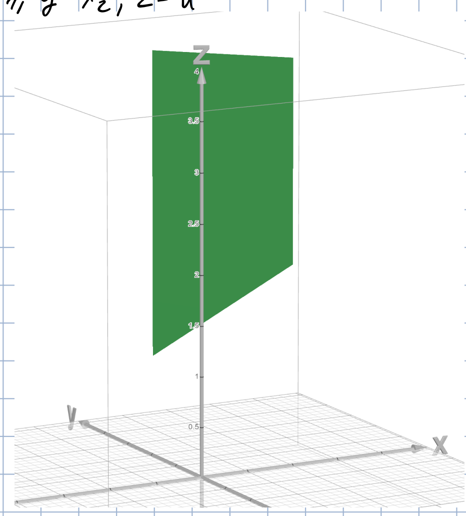
1)

Příklad 1. *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru o duši Gothamu. Poté v daných polyedrech nalezněte páry bodů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.* [4]

	y_1 Spolupracovat (3)	y_2 Odpálit bombu (4)
x_1 Spolupracovat (1)	(1, 1)	(1, 2)
x_2 Odpálit bombu (2)	(2, 1)	(1, 1)

Polyhedr generovaný z: $x, y \geq 0$, $x+y=1$, $x+y \leq 2$, $2x+y \leq 2$

kde $x = x_1$, $y = x_2$, $z = u$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Normalizované polytopy:

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 + x_2 \leq v$

$2x_1 + x_2 \leq v$

nechť $x_i' = \frac{x_i}{v}$

$x_1' + x_2' \leq 1$

$2x_1' + x_2' \leq 1$

Labely odpovídají bodům, kde:

$x_i = 0 \lor (M)_i y \leq u$

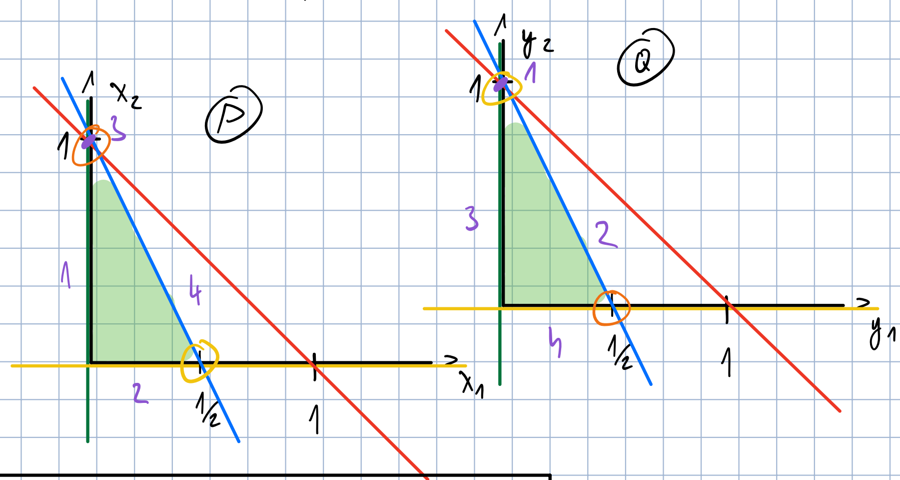
resp.

$y_i = 0 \lor (N^T)_i x \leq v$

→ analogický tvar, díky tomu že $M = N^T$

$1, 2, 3, 4 \approx x_1, x_2, y_1, y_2$

Podle daných nerovností nakreslím shodné (díky $M = N^T$) polyhedry, pouze labely se budou lišit.



NE odpovídají všem párům bodů, které obsahují všechny labely.

Tedy NE jsou následující: $\{$(spolupracovat, odpálit), (odpálit, spolupracovat)$\}$

Příklad 2. *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashovo ekvilibrium následující hry dvou hráčů:* **[2]**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix} \quad N^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Výpočet začněte výběrem značky 1.

$2y_1 + y_2 = \frac{1}{2}$ $\quad 2 - 5y_2 = \frac{1}{2}$ $\quad -5y_2 = -\frac{3}{2}$

$y_1 + 3y_2 = 1$ $\quad y_1 + \frac{9}{10} = 1$ $\quad y_2 = \frac{3}{10}$

$y_1 = 1 - 3y_2$ $\quad y_1 = \frac{1}{10}$

$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{9}{10} = \frac{1}{v} \to v = \frac{9}{10}$

$\boxed{y_i' = y_i \cdot \frac{10}{9}}$

(M)

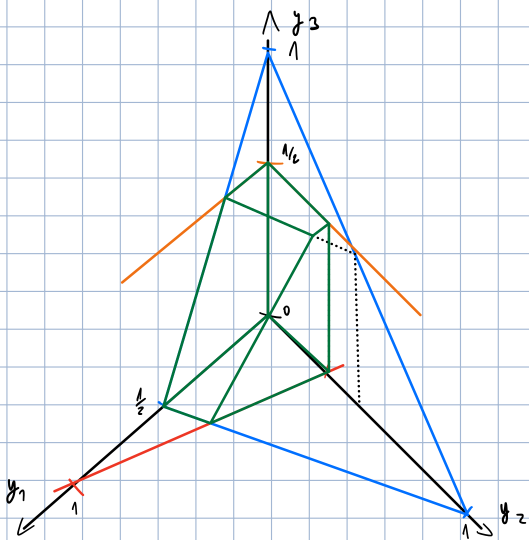
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{v}$

$y_1 + 3y_2 \leq 1$

$2y_3 \leq 1$

$2y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$



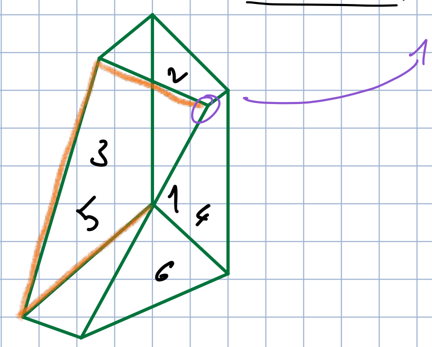
$y_3' = \frac{5}{9}$

$y_2' = \frac{3}{9}$

$y_1' = \frac{1}{9}$

$\longrightarrow$

P:



labely: 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\approx x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$

(N^T)

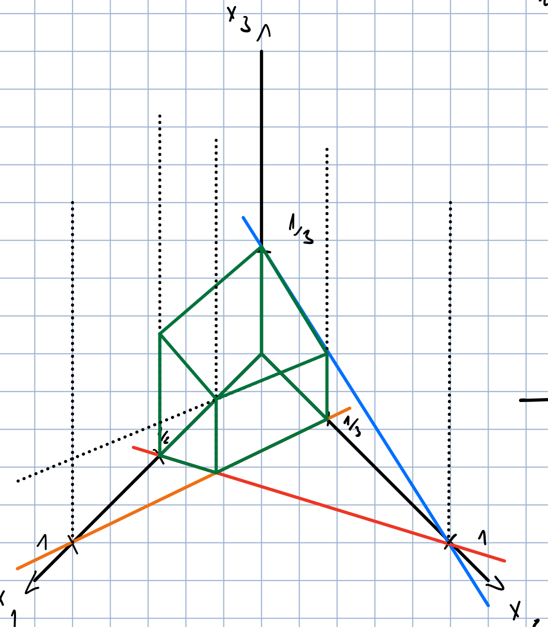
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$

$2x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 + 3x_2 \leq 1$

$x_2 + 3x_3 \leq 1$



$2x_1 + x_2 = 1$ $\quad 2 - 5x_2 = 1$ $\quad x_2 = \frac{1}{5}$

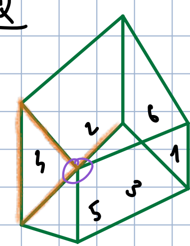
$x_1 + 3x_2 = 1$ $\quad x_1 + \frac{3}{5} = 1$ $\quad x_1 = \frac{2}{5}$

$x_1 = 1 - 3x_2$ $\quad x_2 + 3x_3 = 1$ $\quad x_3 = \frac{4}{15}$

$3x_3 = \frac{4}{5}$

$\longrightarrow$

Q



$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$

$\frac{13}{15} = \frac{1}{v}$

$x_i' = x_i \cdot \frac{15}{13}$

$x_1' = \frac{6}{13}$

$x_2' = \frac{3}{13}$

$x_3' = \frac{4}{13}$

Nyní na dvou zelených polytopech budeme střídat hrany algoritmu a cestu vyznačíme pomocí .

Nalezli jsme pomocí něj NE: $\left\{ \left(\frac{6}{13}x_1 + \frac{3}{13}x_2 + \frac{4}{13}x_3, \ \frac{1}{9}y_1 + \frac{3}{9}y_2 + \frac{5}{9}y_3 \right) \right\}$

Příklad 3. *[Spernerovo lemma] Nechť S je podrozdělení trojúhelníku T v rovině.* Korektní *obarvení vrcholů S přiřazuje jednu ze tří barev (modrá, červená a zelená) každému vrcholu z S tak, že všechny tři barvy jsou použité na vrcholech z T. Navíc každý vrchol z S ležící na hraně z T musí mít jednu z barev, kterou má nějaký vrchol této hrany ležící v T.*

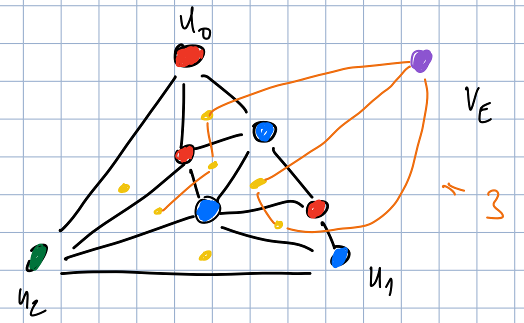
Dokažte, že v každém korektním obarvení S existuje trojúhelníková stěna v S jejíž vrcholy jsou obarveny všemi třemi barvami.

Hint: Použijte redukci na problém END-OF-THE-LINE. **[3]**

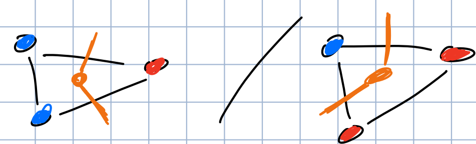
Mějme obarvení grafu $\varphi: S \to \{0,1,2\}$, kde S je množina vrcholů podrozdělení, a udělejme graf G t.ž. $V(G) = \{$stěny podrozdělení „v_i"$\} \cup \{$externí vrchol „v_E"$\}$

$$E(G) = \{(v_i, v_j) \iff (v_i = 0 \wedge v_j = 1) \text{ XOR } (v_i = 1 \wedge v_j = 0)\}$$

– tedy že hrana propojuje barvy 0 a 1. (počítá se i v_E)



Uvažme hranu z T (u_0, u_1), pak všechny nové body na této hraně budou mít pouze barvu 0 nebo 1.
Tedy $\varphi(v_i) \in \{0,1\}\ \forall i$, kde $u_0 = v_0$, $u_1 = v_n$.
Lze nahlédnout, že potom bude vždy lichý počet hran, které mají jinak barevné vrcholy. Tedy speciálně pak bude existovat lichý počet hran v G, které obsahují vrchol v_E. Handshake lemma nám říká, že v grafu musí být sudý počet vrcholů s lichým stupněm. Tedy speciálně musí existovat alespoň ještě jeden vrchol $v_i \neq v_E$, který má lichý stupeň. Jelikož má daný vrchol v_i stupeň > 0 (díky tomu jsme se k němu dostali), musí v dané stěně existovat hrana obarvení $\{0,1\}$. Nyní uvažme třetí, zbylý, vrchol dané stěny. Kdyby měl barvu $\in \{0,1\}$, musel by mít vrchol reprezentující daný trojúhelník sudý stupeň. $\longrightarrow$



Náš vrchol má ale lichý stupeň, tedy třetí vrchol dané stěny musí být obarvený jinou, zbývající barvou. Trojúhelník obarvený třemi barvami tedy musí existovat. ☒