Algoritmická teorie her — 3. domácí úkol[1]
Hrubá korelovaná ekvilibria

zadáno 28.11.2023, termím odevzdání 14.12.2023

Příklad 1. *Nechť je* $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ *hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde* $A_1 = \{a, b, c\}$ *a* $A_2 = \{d, e, f\}$ *s výplatní funkcí* u *určenou Tabulkou 1.*

	d	e	f
a	(1,1)	(-1,-1)	(0,0)
b	(-1,-1)	(1,1)	(0,0)
c	(0,0)	(0,0)	(-1.1,-1.1)

Tabulka 1: Hra z Příkladu 1.

Ukažte, že zde pravděpodobnostní rozdělení p *na* A *s* $p(a, d) = p(b, e) = p(c, f) = 1/3$ *je hrubým korelovaným ekvilibriem v* G *(CCE), ale není korelovaným ekvilibriem v* G *(CE).* **[3]**

Příklad 2. *Nechť je* $G = (P = \{1, 2\}, A, u)$ *hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde* $A_1 = \{U, D\}$ *a* $A_2 = \{L, R\}$ *s výplatní funkcí* u *určenou Tabulkou 2. Určete množinu všech korelovaných ekvilibrií v* G*.* **[4]**

	L	R
U	(4,4)	(1,5)
D	(5,1)	(0,0)

Tabulka 2: The game from Exercise 2.

[1]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/

Příklad 1. *Nechť je $G = (P = \{1,2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{a,b,c\}$ a $A_2 = \{d,e,f\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 1.*

$p = 1/3$

	d	e	f
a	(1,1)	(-1,-1)	(0,0)
b	(-1,-1)	(1,1)	(0,0)
c	(0,0)	(0,0)	(-1.1,-1.1)

Tabulka 1: Hra z Příkladu 1.

ve výpočtu budu používat $c_i(a) = -u_i(a)$

Ukažte, že zde pravděpodobnostní rozdělení p na A s $p(a,d) = p(b,e) = p(c,f) = 1/3$ je hrubým korelovaným ekvilibriem v G (CCE), ale není korelovaným ekvilibriem v G (CE). **[3]**

Definice hrubě korelované strategie:

$$\sum_{a \in A} C_i(a)\, p(a) \leq \sum_{a \in A} C_i(a_i', a_{-i})\, p(a) \quad \forall i, \forall a_i' \in A_i$$

Stačí tedy ověřit výše zmíněnou nerovnost pro všechny možnosti

Nechť $i \in \{1,2\}$, $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{d,e,f\}$. Všechny čitatele, které mají $p(x,y) = 0$ pro $x \in A_1$, $y \in A_2$ budu ignorovat.

jelikož pravděpodobnosti na diagonále se navzájem rovnají a ostatní jsou rovny nule, dovolil jsem si je vytknout.

- $i = 1$, $a_1' = a$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(-1+1+0)$$
$$-0{,}3 \leq 0 \quad ✓$$

- $i = 1$, $a_1' = b$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(1-1+0)$$
$$-0{,}3 \leq 0 \quad ✓$$

- $i = 1$, $a_1' = c$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(0+0+1{,}1)$$
$$-0{,}3 \leq \tfrac{1}{3}\cdot 1{,}1 \quad ✓$$

- $i = 2$, $a_2' = d$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(-1+1+0)$$
$$-0{,}3 \leq 0 \quad ✓$$

- $i = 2$, $a_2' = e$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(1-1+0)$$
$$-0{,}3 \leq 0 \quad ✓$$

- $i = 2$, $a_2' = f$

$$\tfrac{1}{3}(-1-1+1{,}1) \leq \tfrac{1}{3}(0+0+1{,}1)$$
$$-0{,}3 \leq \tfrac{1}{3}\cdot 1{,}1 \quad ✓$$

Tedy všechny nerovnosti platí a jde o hrubě korelované ekvilibrium.

Definice korelovaného ekv.

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a_i, a_{-i})\cdot p(a_i, a_{-i}) \leq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} C_i(a_i', a_{-i})\cdot p(a_i, a_{-i}) \quad \forall i, \forall a_i, a_i' \in A_i$$

Pouze ukážu příklad, na kterém nerovnost neplatí a tedy dokazuje, že nejde o CE.

Nastavme $i = 1$, $a_1 = c$, $a_1' = b$ a uvažme nerovnost výše:

$$0\cdot c_1(c,d) + 0\cdot c_1(c,e) + \tfrac{1}{3}\cdot c_1(c,f) \leq 0\cdot c_1(b,d) + 0\cdot c_1(b,e) + \tfrac{1}{3}\cdot c_1(b,f)$$
$$\vdots$$
$$\tfrac{1}{3}\cdot 1{,}1 \leq \tfrac{1}{3}\cdot 0$$
$$\vdots$$
$$1{,}1 \not\leq 0$$

Tedy nejde o korelované ekvilibrium.

Příklad 2. *Nechť je $G = (P = \{1,2\}, A, u)$ hra v normálním tvaru pro dva hráče, kde $A_1 = \{U, D\}$ a $A_2 = \{L, R\}$ s výplatní funkcí u určenou Tabulkou 2. Určete množinu všech korelovaných ekvilibrií v G.* **[4]**

$c_i(a) = -u_i(a)$

	L	R
U	(4,4)	(1,5)
D	(5,1)	(0,0)

Tabulka 2: The game from Exercise 2.

Definice korelovaného ekv.

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} c_i(a_i, a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i}) \le \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} c_i(a_i', a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i})$$

$\forall i,\ \forall a_i, a_i' \in A_i$

Nerovnosti si pro tuto hru vypíšu explicitně a pak určím všechny její řešení.

$i=1,\ a_i = U,\ a_i' = D$

$$-4 \cdot p(U,L) - 1 \cdot p(U,R) \le -5 \cdot p(U,L) \quad \rightarrow \quad -p(U,R) \le -p(U,L)$$

$i=1,\ a_i = D,\ a_i' = U$

$$-5 \cdot p(D,L) \le -4 \cdot p(D,L) - 1 \cdot p(D,R) \rightarrow -p(D,L) \le -p(D,R)$$

$i=2,\ a_i = L,\ a_i' = R$

$$-4 \cdot p(U,L) - 1 \cdot p(D,L) \le -5 \cdot p(U,L) \quad \rightarrow \quad -p(D,L) \le -p(U,L)$$

$i=2,\ a_i = R,\ a_i' = L$

$$-5 \cdot p(U,R) \le -4 \cdot p(U,R) - 1 \cdot p(D,R) \quad -p(U,R) \le -p(D,R)$$

Tedy:

$$p(U,R) \ge p(U,L) \qquad p(D,L) \ge p(D,R)$$

$$p(U,R) \ge p(D,R) \qquad p(D,L) \ge p(U,L)$$

kdy

$$p(x,y) \ge 0 : \forall x \in A_1,\ \forall y \in A_2$$

$$\sum_{A_1 \times A_2} p(x,y) = 1$$

Řešením jsou tedy všechny takové p, pro které platí podmínky výše.