# Algoritmická teorie her — 4. domácí úkol[1]
## Hry v rozšířeném tvaru a návrh mechanismů

zadáno 19.12.2022, deadline 31.1.2023

**Příklad 1.** *Zkonstruujte rozšířenou formu hry Kámen-nůžky-papír z Tabulky 1 a určete její sekvenční formu a lineární program k nalezení Nashových ekvilibrií této hry.* **[3]**

| | Rock | Paper | Scissors |
|---|---|---|---|
| Rock | (0,0) | (-1,1) | (1,-1) |
| Paper | (1,-1) | (0,0) | (-1,1) |
| Scissors | (-1,1) | (1,-1) | (0,0) |

Tabulka 1: Hra Kámen-nůžky-papír v normálním tvaru.

**Příklad 2.** *Předpokládejme, že v aukci prodáváme $k$ identických položek celkem $n > k$ kupujícím. Předpokládejme, že každý kupující může získat nanejvýš jednu položku. Jak vypadá příslušná varianta Vickreyovy aukce? Dokažte, že je DSIC.* **[2]**

**Příklad 3.** *Nechť $F$ je uniformní rozdělení pravděpodobnosti na $[0,1]$. Uvažte 1-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 a 2, kteří mají rozdělení $F_1 = F$ a $F_2 = F$. Dokažte, že střední hodnota zisku obdrženého při Vickreyho aukci s rezervou $1/2$ se rovná $5/12$.* **[2]**

**Příklad 4.** *Spočítejte virtuální ohodnocení následujících rozdělení pravděpodobnosti a rozhodněte, která z nich jsou regulární.*

(a) *Rozdělení $F(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)^c}$ na $[0,\infty)$, kde $c > 0$ je nějaká konstanta,* **[1]**

(b) *Uvažte rozdělení $F$ z části (a) pro $c = 1$. Ukažte, že když kupující vybírají svá ohodnocení podle $F$, pak nemusí platit, že střední hodnota zisku se rovná střední hodnotě virtuálního sociálního přebytku. Abyste uvedli na pravou míru tento výsledek s větou z přednášky o maximalizaci střední hodnoty zisku, ukažte, jaký předpoklad této věty není splněn.* **[3]**

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

**Příklad 1.** *Zkonstruujte rozšířenou formu hry Kámen-nůžky-papír z Tabulky 1 a určete její sekvenční formu a lineární program k nalezení Nashových ekvilibrií této hry.* **[3]**

2

| | | Rock | Paper | Scissors |
|---|---|---|---|---|
| | Rock | (0,0) | (-1,1) | (1,-1) |
| 1 | Paper | (1,-1) | (0,0) | (-1,1) |
| | Scissors | (-1,1) | (1,-1) | (0,0) |

Tabulka 1: Hra Kámen-nůžky-papír v normálním tvaru.

$$(P, S, u, C)$$

$$P = \{1, 2\}$$

$$S_1 = \{\emptyset, U, N, P\} = S_2 \quad , \quad S = (S_1, S_2)$$

$$u_1, u_2 : S \to \mathbb{R} \quad , \quad u = (u_1, u_2)$$

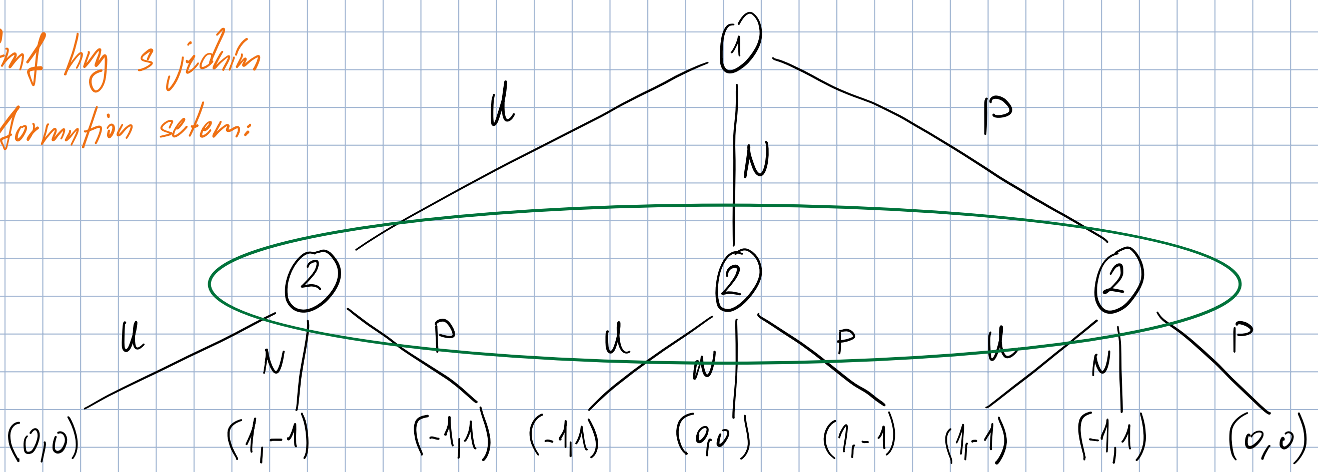
dané výplatní maticí:

$$A = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ U \\ N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & U & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = B^T$$

$$C = (C_1, C_2)$$

$$C_i := \{ x \in \mathbb{R}^{|S_i|} \mid x_\emptyset = 1 \wedge x_{\sigma_h} = \sum_{c \in C_h} x_{\sigma_h c} : \forall h \in H_i \}$$

Graf hry s jedním information setem:





$$A = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ U \\ N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & U & N & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = B^T$$


Constraints vyjádřím následovně:

$$X(\emptyset) = 1$$

$$X(\sigma_h) = \sum_{a \in C_h} (\sigma_h a) \quad :$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} X(\emptyset) \\ X(U) \\ X(N) \\ X(P) \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e}$$

$\boxed{\text{zero sum}} \Rightarrow F \quad y \quad f$

Tedy lineární program pro výpočet NE je:

a) $\min_{u,y} e^T u$

$$Fy = f$$

za podm:

$$E^T u - Ay \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Jelikož jde o symetrickou zero sum, je stejná strategie NE i pro druhého hráče.

**Příklad 2.** *Předpokládejme, že v aukci prodáváme $k$ identických položek celkem $n > k$ kupujícím. Předpokládejme, že každý kupující může získat nanejvýš jednu položku. Jak vypadá příslušná varianta Vickreyovy aukce? Dokažte, že je DSIC.* **[2]**

## Definice DSIC:

Všichni hráči mají dominantní strategii bidovat pravdivě.

Pokud všichni bidují pravdivě, je jejich utility $u_i \geq 0$

## Popis aukce:

Upravíme Vickreyovu podmínku, že cena bude určena $(k+1)$-ní nabídkou v seznamu sestupně seřazených nabídek. Pokud by byla vyšší, byla by utility některých hráčů záporná, protože by platili cenu vyšší než sami nabídly. $(k+1)$-ní je tak první, kterou má smysl ověřit.

## Důkaz že je DSIC:

- každý hráč biduje pravdivě: $\forall i: v_i = b_i$

Mějme $B :=$ $k$-tá nejvyšší nabídka v sestupně setříděném seznamu neobsahující $b_i$

Pokud $b_i < B$, hráč prohrál a $u_i = 0$.

Pokud $b_i \geq B$, pak vyhrál a $u_i = v_i - B$.

Nyní pokud $v_i < B$, nejlepší možná utility je $MAX(v_i - B, 0) = 0$,
tedy hráč prohrál a docílil toho tak, že nabídl pravdivě.

Jinak pokud $v_i \geq B$, —//— je —//— $= v_i - B \geq 0$,
hráč vyhrál a docílil toho tak, že nabídl poctivě.

Zároveň je vidět, že utility každého hráče je vždy nezáporná, pokud biduje pravdivě, takže i druhá část DSIC je splněna.