1) Odvoďte $u_i(s_i) = \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i)\, u_i(a_i, s_{-i})$, když víme, že

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j)$$

podmíněné utility všech ostatních hráčů

$$= \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) \cdot \left[\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot \prod_{j=\{1..n\}/i} s_j(a_j) \right]$$

2) Spočtěte NE v:

pravděpodobnost, že zvolím danou akci

$$u_i(s_i) = \sum_{a_i \in A_i} s(a_i) \cdot u_i(a_i, s_{-i})$$

outcome

prisoners dilemma, kámen-nůžky-papír

	T	~~S~~
T	-2,-2	~~0,-3~~
~~S~~	~~-3,0~~	~~-1,-1~~

Ostatní jsou dominované

Battle of Sexes:

	A	B
A	(2,1)	(0,0)
B	(0,0)	(1,2)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hledám NE: $s_1 = (p, 1-p)$, $s_2 = (q, 1-q)$

$$u_2 = x^T N y = (p, 1-p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$
$$= (p, 2-2p) \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$
$$= pq + 2 - 2p - 2q + 2qp$$
$$= \underline{3pq - 2p - 2q + 2}$$

$$u_1 = x^T M y = (p, 1-p) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} =$$
$$= (2p, 1-p) \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$
$$= 2pq + 1 - p - q + pq$$
$$= \underline{3pq - p - q + 1}$$

$$\frac{d}{dq} = 3p - 2 \qquad p = 2/3$$

$$\frac{d}{dp} = 3q - 1 \qquad q = 1/3$$

$\Rightarrow$ pokud $p = 0$, pak: $-2q + 2$, tedy hráč 2 bude minimalizovat q.

Iterované dominované ekvilibria

→ pomocí iterací jsem zredukoval matici na 2x2, nyní spočítám NE:

Snažím se najít strategii, která pak jednoznačně vyřadí alespoň jednu jinou a třeba mě to někam dostane.

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (p, 1-p) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 1 \\ 15 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (p+15, -17p+18) \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = pq + 15q - 17p + 18 + 17pq - 18q$$

$$= 18pq - 3q - 17p + 18$$

→ když by $q=0$ → $-17p+18$ ⇒ $p=0$

$$\frac{d}{dp} = 18q - 17 \rightarrow q = \frac{17}{18}$$

$$u_2 = (p, 1-p) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = (12-8p, 10) \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = 12q - 8qp + 10 - 10q = -8qp + 2q + 10$$

když by $p=0$ → $q=1$

$$\frac{d}{dq} = -8p + 2 \rightarrow p = \frac{1}{4}$$

Našel jsem NE $\left(\frac{17}{18} q_1 + \frac{1}{18} q_2, \frac{1}{4} p_1 + \frac{3}{4} p_2\right)$

	c_1	c_2	c_3	c_4
r_1	(5, 2)	(22, 4)	(4, 9)	(7, 6)
r_2	(16, 4)	(18, 5)	(1, 10)	(10, 2)
r_3	(15, 12)	(16, 9)	(18, 10)	(11, 3)
r_4	(9, 15)	(23, 9)	(11, 5)	(5, 13)

1

2 r_4 vždycky horší jak r_3

3 r_1 vždycky horší jak r_3

4 c_4 vždycky horší jak c_3

A na matici 2x2 jsem to již vypočítal výše.

Support enumeration.

Mějme Game Of Chicken:

(0,0)	(-1,1)
(1,-1)	(-10,-10)

, spočtěte NE pomocí support enumeration

$$u_1 = \underline{x^T M y} = u$$

$$u_2 = x^T N y$$

$$y^T \underline{N^T x} = v$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}, \quad N^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

payoff prvního hráče

payoff druhého

$k = 1$ $\longrightarrow$ mám 4 dvojice možných akcí $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$

- prakticky znamená, že hraju pouze jednu akci.
Aby bylo NE, nesmí existovat žádná jiná akce, která by mi dala lepší payoff, když znám tah protihráče.

$$\sum_i x_i = 1, \quad \sum_j y_j = 1$$

$$\sum_i (N^T)_{j,i}\, x_i = v, \quad \sum_j M_{ij}\, y_j = u$$

$x, y \geq 0$ if $u = \max\{(M)_i\, y : i \in A_1\}$
and $v = \max\{(N^T)_j\, x : j \in A_2\}$

$\rightarrow$ nebude, protože ví-li hráč, že jeden zahraje 0, půjdou do strany.

$\cancel{(0,0)}$ $\cancel{(-1,1)}$

$\cancel{(1,-1)}$ $\cancel{(-10,-10)}$

stejný případ

$\hookrightarrow$ na danou strategii protivníka pro mě neexistuje lepší odpověď.

$k = 2$ $\quad -1 y_2 = u \rightarrow u = -y_2$

$y_1 - 10 y_2 = u \rightarrow y_1 - 9y_2 = 0 \rightarrow y_1 = 9y_2$

$9y_2 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{10}$

$y_1 = \frac{9}{10}$

$-x_2 = v \rightarrow v = -x_2$

$x_1 - 10x^2 = v \rightarrow x_1 - 9x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 9x_2$

$9x_2 + x_2 = 1 \rightarrow x_2 = \frac{1}{10}$

$x_1 = \frac{9}{10}$

jelikož $k=2$ je maximální dimenze matice, jde o NE a není potřeba ověřovat podmínky.

Opakování: Support enum.

$$\sum_i x_i = 1, \quad \sum_j y_j = 1$$

$$\sum_i (N^T)_{ji}\, x_i = v, \quad \sum_j M_{ij}\, y_j = u$$

Pokud $u = \max\{(M)_i\, y : i \in A_1\}$ a $v = \max\{(N^T)_j\, x : j \in A_2\}$
tak mám NE.

Zdegenerovaná normální hra:

(0,0)	(0,1)
(1,0)	(0,0)

– je následující hra zdegenerovaná?

– ano, pokud horní hráč hraje zahrnutelnou, tak levý hráč má nekonečně mnoho strategií.

Je zde nekonečně mnoho strategií NE: $(OB,\ p \cdot N + (1-p) \cdot OB)$ $p \in \langle 0,1 \rangle$

a $(q \cdot N + (1-q) \cdot OB,\ OB)$ $q \in \langle 0,1 \rangle$

Tohle mi garantuje nekonečně mnoho strategií

Rozhodněte, která payoff matice je degenerovaná

(0,1)	(4,2)	(1,3)
(2,0)	(2,3)	(4,4)
(3,0)	(2,1)	(2,1)

– nejdříve se pokusím zredukovat prostor iterovaně dominovanými strategiemi.

→ horní hráč má možnost si vybrat obě, jde o degenerovanou!

prostřední sloupec je striktně lepší → pokud rozhoduju, jestli jde o degenerovanou hru, tak vybírám jen striktně lepší strategie

striktně lepší

(0,1)	(4,0)	(1,0)
(2,2)	(2,3)	(4,1)
(3,3)	(2,4)	(2,1)

Lemke-Howsonův alg.:

Polyedry a Simplexová metoda

$x \geq 0,\ \mathbb{1}^T x = 1,\ N^T x \leq \mathbb{1} v$

$y \geq 0,\ \mathbb{1}^T y = 1,\ My \leq \mathbb{1} u$

nenulové pravděpodobnosti

sčítání na jedničku

best response podmínka

(label), pokud: $i \in A_1$ a $x_i = 0$ nebo

$i \in A_2$ a $(N^T)_i x = v$

resp. $i \in A_2$ a $y_i = 0$ nebo

$i \in A_1$ a $(M)_i y = u$

Nakreslete polyedr a norm. polytop

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \to N^T = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{P}$:

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$

$10x_1 + 9x_2 \leq v$

$11x_1 \leq v$

$\bar{Q}$:

$y_1, y_2 \geq 0$

$y_1 + y_2 \geq 0$

$10y_1 + 9y_2 \leq u$

$11y_1 \leq u$

je jednodušší dělat norm. polytop, který ale vyžaduje nenulové sloupce a nezáporné payoffs.

↳ to lze zařídit přičtením konstanty ke všem sloupcům, což nezmění podstatu NE.

$P = \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0,\ N^T x \leq \mathbb{1}\}$

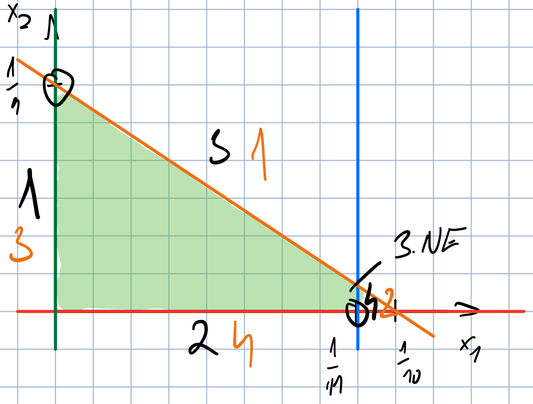
$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq 0,\ My \leq \mathbb{1}\}$

$10x_1 + 9x_2 \leq 1$

$11x_1 \leq 1 \qquad x_1 \leq \frac{1}{11}$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Najdu jen dané dvě NE, zbylé, třetí nikdy pomocí tohoto algoritmu nenajdu.

Simplexová metoda:

-> tedy odpovídá hráčově tahu řádek

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- první hráč hraje řádky
- druhý hráč hraje sloupce

$$A_1 = \{1,2,3\}, \quad A_2 = \{4,5\}$$

Budu mít tolik slack variables, kolik mám celkem akcí, tedy:

r_1, r_2, r_3, s_4, s_5, z čehož dostanu:

Jako první akci jsem si vybral 2, tedy x_2 jde ze hry.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 \qquad\qquad - 6y_5 \\
r_2 &= 1 - 2y_4 - 5y_5 \\
r_3 &= 1 - 3y_4 - 3y_5 \\
s_4 &= 1 \qquad\qquad\qquad - 1x_1 \qquad\quad - 4x_3 \\
s_5 &= 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

min ratio

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 \qquad\qquad \boxed{-6y_5} \\
r_2 &= 1 - 2y_4 - 5y_5 \\
r_3 &= 1 - 3y_4 - 3y_5 \\
s_4 &= 1 \qquad\qquad\qquad - 1x_1 \qquad - 4x_3 \\
x_2 &= \tfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}s_5
\end{aligned}$$

↳ s_5 odpovídá y_5, tedy hledám min-ration na y_5

$$\begin{aligned}
y_5 &= \tfrac{1}{6} \qquad\qquad - \tfrac{1}{6}r_1 \\
r_2 &= \tfrac{1}{6} - 2y_4 + \tfrac{5}{6}r_1 \\
r_3 &= \tfrac{1}{2} - 3y_4 + \tfrac{1}{2}r_1 \\
s_4 &= 1 \qquad\qquad\qquad - 1x_1 \qquad - 4x_3 \\
x_2 &= \tfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}s_5
\end{aligned}$$

-> r_1 odpovídá x_1

$$
\begin{aligned}
y_5 &= \tfrac{1}{6} & & - \tfrac{1}{6} r_1 \\
r_2 &= \tfrac{1}{6} & - 2y_4 & + \tfrac{5}{6} r_1 \\
r_3 &= \tfrac{1}{2} & - 3y_4 & + \tfrac{1}{2} r_1 \\
x_1 &= 1 & & \quad \boxed{-s_4} \quad - 4x_3 \\
x_2 &= \tfrac{1}{2} & & \quad - \tfrac{3}{2} x_3 - \tfrac{1}{2} s_5
\end{aligned}
$$

→ nový odpovídá y_4 → hledám min-ratio

vyhrává r_2

$$-3 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12} r_1 - \frac{1}{2} r_2 \right)$$

$$- \frac{3}{12} - \frac{15}{12} r_1 - \frac{3}{2} r_2$$

$$
\begin{aligned}
y_5 &= \tfrac{1}{6} & - \tfrac{1}{6} r_1 & \\
y_4 &= \tfrac{1}{12} & + \tfrac{5}{12} r_1 & - \tfrac{1}{2} r_2 \\
r_3 &= \tfrac{1}{4} & - \tfrac{3}{4} r_1 & - \tfrac{3}{2} r_2 \\
x_1 &= 1 & & - s_4 - 4x_3 \\
x_2 &= \tfrac{1}{2} & & - \tfrac{3}{2} x_3 - \tfrac{1}{2} s_5
\end{aligned}
$$

→ zde algoritmus končí, jelikož se odpovídající slack variable ke změně 2, se kterou jsem začal, stala nebázickou.

$$y_5 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12} \to \frac{2}{3}$$

$$y_4 = \frac{1}{12} \to \frac{1}{3}$$

$x_3 = 0$ (není žádnou proměnnou v bázi)

$$x_1 = 1 \to \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \to \frac{1}{3}$$

Dostali jsme tedy NE: $\underline{\underline{\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T, \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T \right)}}$

ε-NE

s profil je NE, pokud $\forall s_i' \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) - \varepsilon$

Mějme hru:

$(1,1)$	$(0,0)$ ✗
$(1+\frac{\varepsilon}{2}, 1)$	$(500,500)$

—> zatímco v normální hře:

✗ $(1,1)$	$(0,0)$ ✗
✗ $(1+\frac{\varepsilon}{2}, 1)$	$(500,500)$

—> toto není NE, protože horní hráč by raději zahrál první akci

Korelovaná ekvilibria

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\, p(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i})$$

Kdybychom měli r jako konvexní kombinaci dvou:

$r = \alpha \cdot p + (1-\alpha) \cdot q, \quad \alpha \in \langle 0,1 \rangle$ —> půjdu čistě od jedné distribuce k druhé

Mějme hru:

	T	S
T	$(-2,-2)$	$(0,-3)$
S	$(-3,0)$	$(-1,-1)$

Spočtěte všechna korelovaná ekv.

—> hra je symetrická, stačí počítat pro jednoho

$u_1(T,T)$

$$-2 \cdot P(T,T) \geq -3 \cdot P(T,T) - P(T,S)$$

$$-3 \cdot P(S,T) - P(S,S) \geq -2 \cdot P(S,T)$$

$$-2 \cdot P(T,T) \geq -3 \cdot P(T,T) - P(S,T)$$

$$-3 \cdot P(T,S) - P(S,S) \geq -2\, P(T,S)$$

$$P(T,T) + P(T,S) \geq 0$$

$$-\overset{=0}{P(S,T)} - \overset{=0}{P(S,S)} \geq 0$$

$$P(T,T) + P(S,T) \geq 0$$

$$-\underset{=0}{P(T,S)} - \underset{=0}{P(S,S)} \geq 0$$

$$\underline{\underline{P(T,T) = 1}}$$

Korelované ekvilibrium říká oběma vypovědět —> to dává smysl, celkem si tak odsedí nejméně.

Zkouška simplexové metody:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3. \end{pmatrix}$$

$\underbrace{My}$ $\underbrace{N^T x}$

$A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4,5,6\}$

$$N^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

-začněte výběrem změny 1, což odpovídá akci x_1

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 - y_4 - 3y_5 \\
r_2 &= 1 - 2y_6 \\
r_3 &= 1 - 2y_4 - y_5 - y_6 \\
s_4 &= 1 - 2x_1 - x_2 \\
s_5 &= 1 - x_1 - 3x_2 \\
s_6 &= 1 - x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 - y_4 - 3y_5 \\
r_2 &= 1 - 2y_6 \\
r_3 &= 1 - 2y_4 - y_5 - y_6 \\
x_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{5}{2}x_2 \\
s_6 &= 1 - x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}y_5 + \tfrac{1}{2}y_6 + \tfrac{1}{2}r_3 \\
r_2 &= 1 - 2y_6 \\
y_4 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}y_5 - \tfrac{1}{2}y_6 - \tfrac{1}{2}r_3 \\
x_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{5}{2}x_2 \\
s_6 &= 1 - x_2 - 3x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}y_5 + \tfrac{1}{2}y_6 + \tfrac{1}{2}r_3 \\
r_2 &= 1 - 2y_6 \\
y_4 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}y_5 - \tfrac{1}{2}y_6 - \tfrac{1}{2}r_3 \\
x_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{5}{2}x_2 \\
x_3 &= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s_6 - \tfrac{1}{3}x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{2}y_5 - \tfrac{1}{4}r_2 + \tfrac{1}{2}r_3 \\
y_6 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}r_2 \\
y_4 &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}y_5 + \tfrac{1}{2}r_2 - \tfrac{1}{2}r_3 \\
x_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s_4 - \tfrac{5}{2}x_2 \\
x_3 &= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s_6 - \tfrac{1}{3}x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{2}y_5 - \tfrac{1}{4}r_2 + \tfrac{1}{2}r_3 \\
y_6 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}r_2 \\
y_4 &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}y_5 + \tfrac{1}{2}r_2 - \tfrac{1}{2}r_3 \\
x_1 &= \tfrac{4}{10} + \tfrac{2}{10}s_5 - \tfrac{6}{10}s_4 \\
x_2 &= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}s_4 - \tfrac{2}{5}s_5 \\
x_3 &= \tfrac{4}{15} - \tfrac{1}{15}s_4 + \tfrac{2}{15}s_5 - \tfrac{1}{3}s_6
\end{aligned}$$

$y_5 = \frac{3}{10} \quad -\frac{2}{5}r_1 \; -\frac{1}{10}r_2 \; +\frac{2}{10}r_3$

$y_6 = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}r_2$

$y_4 = \frac{1}{10} \quad +\frac{1}{6}r_1 \; +\frac{7}{10}r_2 \; -\frac{6}{10}r_3$

$x_1 = \frac{4}{10} \; +\frac{2}{10}s_5 \; -\frac{6}{10}s_4$

$x_2 = \frac{1}{5} \; +\frac{1}{5}s_4 \; -\frac{2}{5}s_5$

$x_3 = \frac{4}{15} \; -\frac{1}{15}s_4 \; +\frac{2}{15}s_5 \; -\frac{1}{3}s_6$

$y_4 = \frac{1}{10} \to \frac{1}{9}$

$y_5 = \frac{3}{10} \to \frac{3}{9}$

$y_6 = \frac{5}{10} \to \frac{5}{9}$

$x_1 = \frac{4}{10} = \frac{12}{30} \to \frac{6}{13}$

$x_2 = \frac{2}{10} = \frac{6}{30} \to \frac{3}{13}$

$x_3 = \frac{8}{30} \to \frac{4}{13}$

Vyšlo to správně!

Příklad 3. *Spočítejte všechna korelovaná ekvilibria ve hře Vězňovo dilema.*

	T	S
T	(-2,-2)	(0,-3)
S	(-3,0)	(-1,-1)

Tabulka 2: Hra z příkladu 3

Ověrte, že $P(T,T)$ je korelované ekvilibrium

$P(T,T) = 1$

Musí platit: $\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i})$

Pro hráče 1:

$u_1(T,T) \cdot 1 + u_1(T,S) \cdot 0 \geq u_1(S,T) \cdot 1 + u_1(S,S) \cdot 0$

$u_1(S,T) \cdot 0 + u_1(S,S) \cdot 0 \geq u_1(T,T) \cdot 0 + u_1(T,S) \cdot 0$

tedy

$u_1(T,T) \geq u_1(S,T) \qquad -2 \geq -3 \quad \checkmark$

$u_2(T,T) \cdot 1 + u_2(T,S) \cdot 0 \geq u_2(T,S) \cdot 1 + u_2(T,T)$

$u_2(S,S) \cdot 0 + u_2(S,T) \cdot 0 \geq u_2(S,T) \cdot 0 + u_2(S,S) \cdot 0$

$u_2(T,T) \geq u_2(T,S) \qquad -2 \geq -3 \quad \checkmark$

Tedy podmínky korelovaného equilibria jsou splněny!

Mějme následující hru:

$$\begin{matrix} (2,-2) & (-3,3) \\ (0,0) & (1,-1) \end{matrix}$$

→ nalezněte minimax hodnotu

a hru nalezněte jediné NE, které stanovuje minimax hodnotu.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = (p, 1-p) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} =$$

$$\left(2p, 1-4p\right) \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} =$$

$$2pq + 1 - 4p - q + 4pq =$$

$$6pq - 4p - q + 1$$

$$\frac{d}{dp} = 6q - 4 \rightarrow p = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = (p, 1-p) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} =$$

$$\left(-2p, 4p-1\right) \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} =$$

$$-2pq + 4p - 1 - 4pq + q =$$

$$-6pq + 4p + q - 1$$

$$\frac{d}{dq} = -6p + 1 \rightarrow q = \frac{1}{6}$$

Nalezli jsme NE: $\left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{6}y_1 + \frac{5}{6}y_2\right)$, čemuž odpovídá minimax hodnota:

Když dosadím do rovnic výše:

$$u_1 = \underbrace{\cancel{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{6}}}_{\frac{2}{3}} \underbrace{- \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3}}_{-\frac{2}{3}} \underbrace{- \frac{1}{6} + 1}_{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$u_2 = \underbrace{-6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}}_{-\frac{2}{3}} \underbrace{+ \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{2}{3}}_{+\frac{2}{2}} + \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$$

V zerosum game musí být $u_1 = -u_2$ ✓

ε - Nash:

$$\forall s_i, i \in P: u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) - \varepsilon \quad \forall s_i' \neq s_i$$

Korelovaná ekv.

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\, p(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i', a_{-i}) \cdot p(a_i, a_{-i})$$

utility fce:

$$u_i(s) = \sum_{a_i \in A_i} s(a_i) \cdot u_i(a_i, s_{-i})$$

Simplexová metoda následující hry:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \to N^T = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{3,4\}$

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - 10y_3 - 9y_4 \\ r_2 &= 1 - 11y_3 \\ s_3 &= 1 - 10x_1 - 9x_2 \\ s_4 &= 1 - 11x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - 10y_3 - 9y_4 \\ r_2 &= 1 - 11y_3 \\ s_3 &= \tfrac{1}{11} + \tfrac{10}{11}s_4 - 9x_2 \\ x_1 &= \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{11}s_4 \end{aligned}$$

$$y_4 = \frac{1}{9} - \frac{10}{9}y_3 - \frac{1}{9}r_1$$

r_1 již je nebázická proměnná -> došel jsem na konec.

$$r_2 = 1 - 11y_3$$

$$s_3 = \frac{1}{11} + \frac{10}{11}s_4 - 9x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{11}s_4$$

$x_1 = \frac{1}{11} \to 1$

$y_4 = \frac{1}{9} \to 1$

- druhé dvě hodnoty jsou nebázické, tedy se nepodílejí na NE.
- Vždy beru pouze hodnoty, co se podílejí.