Intervalové odhady n.n.v.: $X_1, \dots X_n$ náh. výb. z $N(\vartheta, \sigma^2)$, σ známe, ϑ chceme určit. Zvolíme $\alpha \in (0,1)$. Nechť $\Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, $C_n := \langle S_n - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}, S_n + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} \rangle$. Pak $P(C_n \ni \vartheta) = 1-\alpha$.
! $Y_n = \frac{S_n - \vartheta}{\sigma/\sqrt{n}}$. $Y_n \sim N(0,1) \to E(Y_n) = 0$, $Var(Y_n) = 1$. $P(\vartheta > S_n + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = P(Y_n < -z_{\alpha/2}) = \Phi(-z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

Pomocí CLV: Stejné jako vlevo. Chceme: $\lim_{n\to\infty} P(C_n \ni \vartheta) = 1-\alpha$. (Výběr nemusí být z $N(\dots)$)
! Y_n jako vlevo. CLV říká: $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. Proto platí:
$$P(\vartheta > S_n + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = P(Y_n < -z_{\alpha/2}) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(-z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

Def: Pro náh. výběr $X_1 \dots X_n \sim F_\vartheta$ a lib. fci g nazveme bod. odh. $\hat{\Theta}_n$: nestranný/nevychýlený pokud $E(\hat{\Theta}_n) = g(\vartheta)$, asymptoticky nevychýlený pokud $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\Theta}_n) = g(\vartheta)$, konzistentní pokud $\hat{\Theta}_n \xrightarrow{P} g(\vartheta)$.
vychýlení $bias_\vartheta(\hat{\Theta}_n) = E(\hat{\Theta}_n) - \vartheta$, $MSE_\vartheta(\hat{\Theta}_n) = E((\hat{\Theta}_n - \vartheta)^2)$ | **$MSE(\hat{\Theta}_n)$** $= bias_\vartheta(\hat{\Theta}_n)^2 + var_\vartheta(\hat{\Theta}_n)$! $var(\hat{\Theta}_n) = var(\hat{\Theta}_n - \vartheta) = E((\hat{\Theta}_n - \vartheta)^2) - (E(\hat{\Theta}_n - \vartheta))^2$. vlevo $MSE_\vartheta(\hat{\Theta}_n)$, vpravo $bias^2_\vartheta$

Výběrový průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n X_i$, $\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \leftarrow$ **Výběrový rozptyl** | **Thm:** $\bar{X}_n$ je konzistentní nestranný odhad μ, $\bar{S}_n^2$ konzistentní asymptoticky nestranný odh. σ^2, $\hat{S}_n^2$ konzistentní nestranný odhad σ^2

Momenty: $m_r(\vartheta) := E(X^r)$: $X \sim F_\vartheta$ ... r-tý moment, $\widehat{m_r(\vartheta)} := 1/n \sum_i^n X_i^r$ pro náh. výběr $X_1 \dots X_n$ | $\widehat{m_r(\vartheta)}$ je nestranný konzistentní odhad pro $m_r(\vartheta)$.

Met. Max. Věro: Mějme náh. výb. $X = (X_1 \dots X_n)$ z modelu s par. ϑ. $x = (x_1 \dots x_n)$ realizace výběru X. Pak $p_X(x;\vartheta) = \prod_i^n p_{X_i}(x_i;\vartheta)$ nebo $f_X(x;\vartheta) = \prod_i^n f_{X_i}(x_i;\vartheta)$ je $L(x,\vartheta)$ věrohodnost. Tedy $L(x,\vartheta)$ je funkce ϑ. Volíme takové ϑ, pro které je $L(x;\vartheta)$ maxim. (vyplatí se hledat log) | **Studentovo rozdělení:** $X_1 \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ n.n.v. Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni je rozd. n.v. $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{S}_n/\sqrt{n}}$, kdyby $\hat{S}_n = \sigma$, pak máme $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, tedy $\sim N(0,1)$

Thm: O stud. rozd. $X_1 \dots X_n$ náh. výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Neznáme $\vartheta = (\mu, \sigma)$, ale chceme μ. Máme $\alpha \in (0,1)$. $\Psi_{n-1}(t_{\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, $C_n' := \langle \bar{X}_n - \delta, \bar{X}_n + \delta \rangle$ pro $\delta = t_{\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}}$. Pak $P(C_n' \ni \mu) = 1-\alpha$.
! $\bar{X}_n - \delta < \mu < \bar{X}_n + \delta \to -\delta < \bar{X}_n - \mu < \delta \to -t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{S}_n/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}$, nyní z definice $t_{\alpha/2}$ a symetrie je $\Psi_{n-1}(-t_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

Testování hypotéz: H_0 – konzervativní model, H_1 – alternativa. Buď H_0 zamítneme (popis světa není správný), nebo nezamítneme (data jsou v souladu s H_0)
Chyby dvou druhů: 1: chybné zamítnutí, 2: chybné přijetí. Hladina významnosti α: $P(\text{chyby } 1) = \alpha$. Určíme kritický obor, zamítneme H_0 pokud $h(X_1 \dots X_n) \in W$ (kritický obor)
$\beta = P(h(X) \notin W : H_1) \to 1-\beta$ je síla testu. | **Test dobré shody:** Opakujeme n-krát pokus, který může mít jeden z k výsledků, nezávisle. Testujeme $H_0 := P(k_i) = p_i$. $X_i := \#$pokusů s k_i výsl. $E_i := p_i n$ jako $E(X_i)$. Spočteme Pearsonovu statist. $T = \sum_i^k (E_i - X_i)^2 / E_i$. Kritická hodnota γ je kvant. fce χ^2 rozdělení s $k-1$ stupni volnosti v bodě $1-\alpha$, tj. $\gamma = Q(1-\alpha)$, kde $Q :=$ kvant. fce pro χ^2_{k-1}. Nulovou hypotézu zamítneme, pokud $T > \gamma$. Při takové volbě je $P(\text{chyba I. druhu}) = \alpha$.

Permutační test: Máme $X_1 \dots X_m \sim F_X$, $Y_1 \dots Y_n \sim F_Y$, chceme $H_0 := F_X = F_Y$, $H_1 := F_X \neq F_Y$. Zvolíme statistiku T: $T(X_1 \dots X_m, Y_1 \dots Y_n)$, např.: $|\bar{X}_n - \bar{Y}_n|$
Náhodně zpermutujeme $m+n$ čísel, pro každou permutaci vyčíslíme T. Pokud by byly všechny proměnné stejné, generovaly se ze stejného rozdělení. Jako p-hodnotu vezmeme $p = 1/(m+n)! \cdot \sum_j I(T_j > T_{pův}) \to$ to je pст 1. druhu.

Generování n.v.: Základní metodou je inverse sampling: věta $U \sim U(0,1)$ a F dist. fce. Pokud přiřazovaná n.v. nabývá hodnot $x_1 \dots x_n$ s pstí $p_1 \dots p_n$, tak při rozdělení intervalu $(0,1)$ na $p_1 \dots p_n$ bude při uniformním výběru na $(0,1)$ dostávat správnou distribuci. Pokud ale neumím vypočítat Q, pomůže rejection sampling.
Tj. generuji X za pomoci Y, kde Y je nějak rozumně blízko: $c > 0$ $\forall t$: $f_X(t) \leq c \cdot f_Y(t)$. Vygeneruji realizaci y z Y. Pokud $u \leq \frac{f_X(y)}{c f_Y(y)}$, tak $X := y$, jinak zahodím a postupuji znovu.

Diskrétní rozdělení: **Bern(p):** $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1-p$, $E(X) = p$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p)$ | **Geom(p):** $p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, $E(X) = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ | **Bin(n,p):** $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $Var(X) = np \cdot (1-p)$
Hyper(N,K,n): $p_X(k) = \binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k} / \binom{N}{n}$, $E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$, $Var(X) = n \cdot \frac{K}{N}(1-\frac{K}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$ ($EX = \sum_i E(X_i)$: $X_i \sim Bern(\frac{K}{N})$) | **Pois(λ):** $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$ $\to$ $X_n \sim Bin(n, \lambda/n)$, $X \sim Pois(\lambda)$: $\lim_n p_{X_n}(k) = p_X(k)$

Spojité rozdělení: **U(a,b):** $f_X(x) = 1/(b-a)$: $x \in \langle a,b \rangle$, jinak 0. $F_X(x) = (x-a)/(b-a)$, $x \leq a := 0$, $x \geq b := 1$, $E(X) = (a+b)/2$, $Var(X) = (b-a)^2/12$ | **Exp(λ):** $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$: $x \geq 0$, jinak 0. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$: $x \geq 0$
$E(X) = 1/\lambda$, $Var(X) = 1/\lambda^2$ | **$N(\mu, \sigma^2)$:** $EX = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, $f_X(x) = \varphi$: $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-x^2/2}$, $F_X(x) = \Phi = \int \varphi$ | **$X \sim N(\mu, \sigma^2)$**, pokud $Z = (X-\mu)/\sigma$ a $Z \sim N(0,1)$. Obráceně $\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

PNS-disk.: X disk. n.v., g real fce $\Rightarrow E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot P(X=x)$! $Y = g(X)$, $EY = \sum_y y \cdot P(Y=y)$, kde $P(Y=y) = \sum_{x: g(x)=y} P(X=x)$ | **$E(X|B)$** $= \sum_x x \cdot P(X=x|B)$

Alt EX: $EX = \sum_n^\infty P(X > n)$! $E(X) = \sum_0^\infty k \cdot P(X=k) = \sum_0^\infty \sum_0^k P(X=k) = \sum_0^\infty \sum_{k>n} P(X=k) = \sum_0^\infty P(X > n)$ | **Sdr. hustota:** $f_{X,Y}(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y) / \partial x \partial y$

EX $:= \sum_x x \cdot P(X=x)$, **Var(X)** $= E((X - EX)^2) = E(X^2) - E(X)^2$, $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$! $Y = aX + b$, $Var(Y)$, rozepíšu „vnitřek"... | **Cov(X,Y)** $= E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$

Korelace: $\varrho(X,Y) = cov(X,Y) / \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}$, $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$ | $X = \sum_i X_i$, $Var(X) = \sum_i \sum_j cov(X_i, X_j) = \sum_i var(X) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)$! $E(X^2) = E((\sum_i X_i)^2) = E(\sum_i \sum_j X_i X_j) = \sum_i \sum_j E(X_i X_j)$, $E(X)^2 = (\sum_i E(X_i))^2 = \sum_i \sum_j EX_i \cdot EX_j$ (1–2)

EX spoj: $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$ | **Sdr. prv. fce:** $p_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$ | **Distr. fce:** $F_X(x) := P(X \leq x)$, neklesající, zprava spojitá, $\lim_{-\infty} = 0$, $\lim_{\infty} = +1$ | **Var(X)** $= E((X-\mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx$
kde $\mu = EX$. Opět $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$, kde $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$ | **Kvant. fce** $Q_X : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R}$: $Q_X(p) := \min\{x \in \mathbb{R} : p \leq F_X(x)\}$, $Q_X(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$ | **Sdr. dist. fce:** $F_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \wedge Y(\omega) \leq y\})$

Nez. n.v. X,Y: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ | **Marg. hust:** $f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy$ | **Podm. hust:** $f_{X|Y}(x|y) = (f_{X,Y}(x,y)) / f_Y(y)$ | **$F_{X|B}(x)$** $:= P(X \leq x | B)$, $f_{X|B}(x) = f_X(x) / P(X \in S)$, kde $B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}$

Podm. hust, E: $E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x) dx$, pokud B_i rozklad: $E(X) = \sum_i P(B_i) \cdot E(X|B_i)$, $E(X) = E(E(X|Y))$ | **Emp. dis. fce:** $X_1 \dots X_n \sim F$ je náh. výběr. Emp. dis. fce je $\hat{F}_n(x) = (\sum_i^n I(X_i \leq x))/n$, kde $I(X_i \leq x) = 1$, pokud $X_i \leq x$, jinak 0. | **$P(A|B)$** $= P(A,B)/P(B)$

Momenty, příklad: $X_1 \dots X_n \sim Bern(p)$, hledáme ϑ. $m_1(\vartheta) = \vartheta$, $\widehat{m_1(\vartheta)} = \bar{X}_n$, tudíž bodový odhad je $\bar{X}_n$. | Nyní $X_1 \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, hledáme $\vartheta = (\mu, \sigma)$. Tedy $m_1(\vartheta) = \mu$, $m_2(\vartheta) = E(X^2) = \underbrace{Var(X) - E(X)^2}_{\sigma^2 - \mu^2}$.
tedy $\mu = \bar{X}_n$, $\sigma^2 - \mu^2 = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \to \hat{\mu} = \bar{X}_n$, $\hat{\sigma} = \sqrt{((X_1^2 + \dots + X_n^2)/n) - \bar{X}_n^2}$

Max. věro, příklad: $X_1 \dots X_n \sim Bern(\vartheta)$, hledáme ϑ. Předpokládejme, že bylo právě k pozitivních jevů. Tedy $L(x:\vartheta) = \vartheta^k \cdot (1-\vartheta)^{n-k}$, tedy $k \cdot \log(\vartheta) + (n-k) \cdot \log(1-\vartheta)$, nyní zderivujeme a najdeme nulový bod: $\frac{k}{\vartheta} - \frac{n-k}{1-\vartheta}$, to chceme rovno 0, tudíž $\frac{k}{\vartheta} = \frac{n-k}{1-\vartheta}$, tedy $\vartheta = k/n$. Což je opět $\bar{X}_n$.

Test. hyp., příklad: $X_1 \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 známe ze zkušenosti, chceme μ. $H_0 := \vartheta = \mu$, $H_1 := \vartheta \neq \mu$. Zvolíme statistiku $Z \sim (\bar{X}_n - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$. Víme, že $Z \sim N(0,1)$, pokud platí H_0.
Pokud zvolíme $W = \{x : |x| > z_{\alpha/2}\}$, kde $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, tak pst chyby 1. druhu bude přesně α. $\leftarrow$ Toto je příklad jednovýběrového testu.

Nezáv. veličiny: X, Y jsou nezáv., pokud $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, neboli $P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$. Pro spoj: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Hustota n.v. X: $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$ je hustota n.v. X, pokud $\forall x \in \mathbb{R}$: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Distr. fce: $F_X(x)$: $\int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ | **E(X)** $= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt$

Integrace substitucí: $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left| \begin{matrix} y = g(x) \\ dy = g'(x) dx \end{matrix} \right| = \int f(y) dy$, $F(y) + c = F(g(x)) + c$

Bayesova: $P(B_j|A) = P(B_j)\cdot P(A|B_j) \,/\, \sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)$ ⚡ $P(B_j|A) = P(B_j \cap A)/P(A) = P(B_j)\cdot P(A|B_j)/P(A)$ a $P(A)$ vyjádříme celk. pstí. | d.n.n.v.

Pois. par.: $A_1 \dots A_n$ skoro nez. jevy, $P(A_i)=p_i$, $\sum_i p_i = \lambda$. Nechť n velké, p_i malé. Pak $\sum_i I_{A_i} \sim Pois(\lambda)$. | **Marg. rozd.** $p_X(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x \wedge Y=y) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$ | **Konvoluční vzorec:** X, Y, $Z = X+Y$ má pstní fci $P(Z=z) = \sum_x P(X=x \wedge Y=z-x)$ ⚡ $g(x,y)=x+y$. $Z=g(X,Y)$. $p_Z(z)=P(Z=z)=\sum_{x,y:g(x,y)=z} P(X=x \wedge Y=y)$ --> to je ale disjunktní sjed. jevů, tedy rozepíšu. Hlavně jsou nezávislé.

Lin. $\mathbb{E}$ pro X,Y: X,Y n.v., $a,b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(aX+bY) = a\cdot \mathbb{E}X + b\cdot \mathbb{E}Y$ ⚡ $g(x,y)=ax+by$. $Z=g(X,Y)$. $\mathbb{E}(Z) = z\cdot p_Z(z) = \sum_z z \cdot \sum_{x,y:g(x,y)=z} P(X=x \wedge Y=y) = \sum_{x,y:g\dots} g(x,y)\cdot P(X=x \wedge Y=y)$ | Pro X,Y n.n.v.: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Spoj. n.v. X s f_X: $P(X=x)=0$, $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$ ⚡ $= P(X\le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a) = \dots = \int_a^b f_X$. Pokud $b=x$, $a=(b-1)/n$, tak pro $n \to \infty$ půjde obsah do 0. $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) + P(X=a)$

X s.n.v. s $F=F_X$: $F(X) \sim U(0,1)$ ⚡ $Y=F(X)$, pro $y \in (0,1)$ vezme x t.ž. $y=F(x)$. $P(Y \le y) = P(F(X) \le F(x)) = P(X \le x) = F(x) = y$, tudíž F_Y se všude shoduje s $U(0,1)$, tedy $Y \sim U(0,1)$

$U \sim U(0,1)$ a F distr.: Buď Q odp. kvant. fce. Pak $Q(U)$ je n.v. s dist. fcí F. ⚡ $X=Q(U)$: $P(X \le x) = P(Q(U) \le x) = P(U \le F_X) = F_X$ --> použijeme pro generování veličiny. Pro nějaké nz. vezmu Q fci a udělám $Q(U)$

Past $\square$: $F=F_{X,Y}$, $P(X \in (a,b\rangle \wedge Y \in (c,d\rangle) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$ | **Konv. spoj. n.v.:** $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$ | $Exp(\lambda)$ má $F_X = 1-e^{-\lambda x}$, tedy $Q(p) = \log(1-p)/-\lambda$, $Q(U) = \log(1-U)/-\lambda$

O rozkladu hustoty: X s.n.v. $B_1 \dots B_n$ rozklad $\Omega \Rightarrow F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x)$ a $f_X(x) = \sum_i P(B_i)\cdot f_{X|B_i}(x)$ ⚡ Stejné jako: | **O celkové psti:** $P(A) = \sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)$ ⚡ $A = (A\cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$, tedy $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$

Markovova ner. n.v. $X \ge 0$, $a \in \mathbb{R} > 0 \Rightarrow P(X \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$ ⚡ $\mathbb{E}X = P(X \ge a)\mathbb{E}(X|X \ge a) + P(X<a)\cdot \mathbb{E}(X|X<a) \ge P(X \ge a)\cdot a + 0$. Lze formulovat: $P(X \ge b\cdot \mathbb{E}(X)) \le 1/b$

Čebyš. ner. X s $\mathbb{E}(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2 \Rightarrow P(|X-\mu| \ge t\cdot\sigma) \le 1/t^2$, neboli $P(|X-\mu| \ge k) \le \frac{\sigma^2}{k^2}$ ⚡ $Y=(X-\mu)^2 \Rightarrow Y \ge 0$, $\mathbb{E}(Y)=\sigma^2$ a nyní Markovova nerov.

Chernoffova ner.: $X = \sum_i X_i$ n.n.v s hodnotami ± 1 s pstí $1/2 \Rightarrow t>0: P(X \le -t\cdot\sigma) = P(X \ge t\cdot\sigma) \le e^{-t^2/2}$, kde $\sigma = \sigma_X = \sqrt{n}$

S2VČ: $X_1, X_2 \dots$ stejně rozdělené n.n.v s $\mathbb{E}(X_i)=\mu$, $Var(X_i)=\sigma^2$. $\overline{X}_n = \sum_i^n X_i / n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu$ skoro jistě (s pstí $=1$)

W2VČ: –||–, $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$ „konverguje v pravděpodobnosti", $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ ⚡ $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = (\sum_i \mathbb{E}X_i)/n = \mu$, jelikož nezáv. $\Rightarrow Var(\overline{X}_n) = (\sum_i Var(X_i))/n^2 = \sigma^2/n$, tedy podle Čebyše: $P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}$ --> to není jenom důkaz, ale i návod na ověřování min. počtu pokusů.

CLV: $X_1, X_2 \dots$ stejně rozdělené n.n.v. s $\mathbb{E}(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$. Nechť $Y_n = ((\sum_i X_i) - n\cdot\mu)/(\sqrt{n}\cdot\sigma)$. Pak $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, tedy pokud F_n je distr. fce Y_n, pak $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{E}(X+Y)$ diskr.: $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ⚡ $g(x,y) = x+y$: $\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\cdot P(X=x \wedge Y=y) = \sum_x\sum_y (x+y)\cdot P(X=x \wedge Y=y) = \sum_x\sum_y x\cdot P(X=x \wedge Y=y) + \sum_x\sum_y y\cdot P(X=x \wedge Y=y) = \sum_x x\cdot P(X=x) + \sum_y y\cdot P(Y=y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

$\mathbb{E}(X\cdot Y)$ n.n.v.: $\mathbb{E}(X\cdot Y) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$ pro n.n.v ⚡ $\mathbb{E}(X\cdot Y) = \sum_x\sum_y xy\cdot P(X=x \wedge Y=y) = \sum_x\sum_y x\cdot P(X=x)\cdot y\cdot P(Y=y) = \sum_x x\cdot P(X=x)\cdot \sum_y y\cdot P(Y=y) = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$. $\Leftarrow \sum_y P(X=x \wedge Y=y) = P(X=x)$

O úplné $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X) = \sum_i P(B_i)\cdot P(X|B_i)$ ⚡ $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\cdot P(X=x) = \sum_x x\cdot\sum_i P(B_i)\cdot P(X|B_i) = \sum_i P(B_i)\cdot\sum_x x\cdot P(X=x|B_i) = \sum_i P(B_i)\cdot\mathbb{E}(X|B_i)$

Vlastnosti Emp. dis. fce: $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x)) = F(x)$, $Var(\hat{F}_n(x)) = (F(x)\cdot(1-F(x)))/n$, $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$

Ověření hustoty: Integrál z $-\infty$ do $+\infty$ musí být roven 1.