

1) Máme $m+n$ symetrických hodů kostkou.

$X :=$ počet šestek z prvních m hodů

$Y :=$ počet šestek z posledních n hodů.

Jaká je dist. $X, Y, X+Y$

$$P(X=x) = \binom{m}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{m-x} \quad \mathbb{E}X = \frac{1}{6} \cdot m$$

$$P(Y=y) = \binom{n}{y} \left(\frac{1}{6}\right)^y \left(\frac{5}{6}\right)^{n-y} \quad \mathbb{E}Y = \frac{1}{6} \cdot n$$

$$\binom{m+n}{m}$$

2) $X = X_1 + \dots + X_n$, $X_i \sim \text{Bern}(p)$. Pokud X_1, \dots, X_n nezávislé,

$X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Tip 1: $X_1 = X_2 = \dots = X_n$

Tip 2: $X_1 = X_2, X_3 = X_4, \dots, X_{n-1} = X_n$

Jaká bude distribuce?

\hookrightarrow např.: při hodu kostkou

Tip 1: $\Omega = \{0, 1\}^n$

$X = X_1 + \dots + X_n = \begin{cases} n & \text{přes } p & P_X(n) = p^n \\ 0 & \text{přes } 0 & P_X(0) = (1-p)^n \end{cases}$

Tip 2: $\Omega = \{0, 1\}^{n/2}$

$Z = X_1 + \dots + X_n$

$X_1(w) = w_1 = X_2(w) \quad P(Z=2) = P(\text{Bin}(\frac{n}{2}, p) = 1)$

3) Na každé stránce nezávisle n hvězd $> p$ se p_i že se trafi.

$X_i :=$ pořadí knihy, když se i -tý hvězda poprvé trafi.

a) Jaká je distribuce? $P(X_i = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

b) Jsou veličiny X_1, \dots nezávislé? Ano, jsou nezávislé

c) Jaká je distribuce $X = \min(X_1, \dots, X_n)$

\hookrightarrow metoda se vchází $(k-1)$ -míst knihou A
 $P(X=k) \hookrightarrow$ metoda se trafi k -tým knihou B

$$P(A) = (1-p)^{n \cdot (k-1)}$$

$$P(B) = 1 - P(Y=0)$$

$$1 - P(B^c)$$

$$1 - (1-p)^n$$

$$P(X=k) = P(A) \cdot P(B) = (1-p)^{n \cdot (k-1)} \cdot (1 - (1-p)^n)$$

→ pravděpodobnost, že se vlněná setkají

4) Označme X počet meteorů během hodiny. Jaké rozdělení použít pro popis X ?

✓ minuta spadá typicky 1 meteorit

✓ sekunda ... —||— ... s jstí $\frac{1}{60}$

$X = \#$ m. za h

$$X \sim \text{Bin} \left(3600, \frac{1}{60} \right) = \text{Poi} \left(3600 \times \frac{1}{60} \right) = \text{Poi}(60) = Y$$

$$P(X=100) = P(Y=100) = e^{-60} \cdot \frac{60^{100}}{100!}$$

5) Necht' X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$.

Určete $E(X)$.

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} \\ 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum x \cdot P(X=x)$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum x$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot (b-a) = \frac{a+b}{2}$$

6) Hádáme neznámé číslo, uniformně náhodně vybrané z množiny $\{1, \dots, 10\}$.

Jaký je průměrný počet potřebných otázek, pokud:

a) ptáme se „je rovno k “?

b) ptáme se „je menší rovno k “?

a) $P(X=h) \rightarrow h$ -tým otázkou jsem uhodl hledané číslo.

$$P(X=1) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$= P(\bar{c}=2) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=7) = P(\bar{c}=7) = \frac{1}{10}$$

$$E(X) = \frac{1}{10} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{10} \cdot 8 + \frac{2}{10} \cdot 9 = 5,4$$