1) Mějme $m+n$ spravedlivých hodů kostkou.

$X :=$ počet šestek z prvních m hodů

$Y :=$ počet šestek z posledních n hodů.

Jaká je dist. $X, Y, X+Y$

$$P(X=x) = \binom{m}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{m-x} \qquad \mathbb{E}X = \frac{1}{6}\cdot m$$

$$P(Y=y) = \binom{n}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^y\left(\frac{5}{6}\right)^{n-y} \qquad \mathbb{E}Y = \frac{1}{6}n$$

$$\binom{m+n}{m}$$

2) $X = X_1 + \dots + X_n$, $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$. Pokud $X_1 \ldots X_n$ nezávislé, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tip 1: } X_1 = X_2 = \dots = X_n \\ \text{Tip 2: } X_1 = X_2,\ X_3 = X_4 \ \dots,\ X_{n-1} = X_n \end{array}\right\}$$
Jaká bude distribuce?
↳ např.: při hodu kostkou

Tip 1: $\Omega = \{0,1\}$ $\quad X = X_1 + \dots + X_n = \begin{cases} n & \text{s pstí } p \quad P_X(n) = p \\ 0 & \text{s pstí } 0 \quad P_X(0) = 1-p \end{cases}$

Tip 2: $\Omega = \{0,1\}^{n/2}$ $\quad Z = X_1 + \dots + X_n$

$$X_1(\omega) = \omega_1 = X_2(\omega) \qquad P(Z=2) = P\left(\mathrm{Bin}\left(\tfrac{n}{2},p\right)=1\right)$$

3) Na koš hází nezávisle n hráčů s pstí p, že se trefí.

$X_i :=$ pořadí hodu, kdy se i-tý hráč poprvé trefí

a) Jaká je distribuce? $P(X_i = k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$

b) Jsou veličiny $X_1, \dots$ nezávislé? Ano, jsou nezávislé

c) Jaká je distribuce $X = \min(X_1, \dots X_n)$

$$P(X=k) \begin{cases} \to \text{nikdo se netrefil } (k-1)\text{-ním hodem } A \\ \to \text{někdo se trefil } k\text{-tým hodem } B \end{cases}$$

$$P(A) = (1-p)^{n\cdot(k-1)}$$ → pravděpodobnost, že se nikdo netrefí

$$P(B) = 1 - P(Y=0)$$

$$1 - P(B^c)$$

$$1 - (1-p)^n$$

$$P(X=k) = P(A)\cdot P(B) = (1-p)^{n\cdot(k-1)} \cdot \left(1-(1-p)^n\right)$$

4) Označme X počet meteorů během hodiny. Jaké rozdělení použít pro popis X?

V minutu spadne typicky 1 meteorit

V sekundu ... —//— ... s pstí $\frac{1}{60}$

$X = \#$ m. za h

$$X \sim Bin\left(3600, \frac{1}{60}\right) \doteq Pos\left(3600 \times \frac{1}{60}\right) = Pos(60) = Y$$

$$P(X=100) \stackrel{4}{=} P(Y=100) = e^{-60}\cdot \frac{60^{100}}{100!}$$

5) Nechť X má uniformní rozdělení na množině $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$.
Určete $\mathbb{E}(X)$.

$$P(X=x) = \begin{cases} c = \frac{1}{b-a+1} \\ 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum x \cdot P(X=x)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}\cdot \sum x$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}\cdot \frac{a+b}{2}\cdot b-a = \frac{a+b}{2}$$

6) Hádáme neznámé číslo, uniformně náhodně vybrané z množiny $\{1 \dots 10\}$.
Jaký je průměrný počet potřebných otázek, pokud:

a) ptáme se „je rovno k"?

b) ptáme se „je menší rovno k"?

a) $P(X=k)$ --> k-tou otázkou jsem uhodl hledané číslo.

$$P(X=1) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$$

$$= P(\bar{c}=2) = \frac{1}{10}$$

$$P(X=7) = P(\bar{c}=7) = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{10} \cdot 1 + \ldots + \frac{1}{10} \cdot 8 + \frac{2}{10} \cdot 9 = 5{,}4$$