1) $t$ = uniformní náhodný čas (0:00 – 24:00)

každou celou (9:00 – 23:00) se objevuje na orloji 12 apoštolů

a) Jaká je pst, že pan Chung uvidí apoštoly, aniž by čekal víc jak 15 min.

b) —//— když přijde mezi (12:00 – 24:00)

$9-23 = 15 \times 30 = 450$ min OK

$24 \times 60 = 1440$ min Celkem

a) $\dfrac{225}{1440} = 0{,}15625$

b) $\dfrac{165}{720} \doteq 0{,}229$

2) U poštovní přepážky trvá vyřízení zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

a) Jaký je parametr $\lambda$, jaká je dist. fce?

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \quad 4 = \dfrac{1}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \dfrac{1}{4}$

$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{4}x}$

b) Jaká je pst, že budeme čekat více jak 4 minuty?

$1 - F_X(4) = e^{-1} \doteq 0{,}3678$

c) Jaká je pst, že budeme čekat mezi 3 a 5

$F_X(5) - F_X(3) = -e^{-\frac{5}{4}} + e^{-\frac{3}{4}} \doteq 0{,}18586$

3) n.v. $X$ „nemá paměť" pokud $P(X > s+t \mid X \geq s) = P(X > t)$ pro $x, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, co už jsme čekali, nemá vliv na to, jak dlouho čekat budeme. Ukažte, že ani exponenciální nemá paměť:

B $\quad P(X \geq s) = 1 - \left(F_X(s) - P(X=s)\right) = 1 - \underbrace{F_X(s)}_{1-e^{-\lambda s}} + P(X=s)$

A $\quad P(X > s+t) = 1 - F_X(s+t) = 1 - F_X(s+t)$

$P(A|B)$

$$\frac{P(X > s+t)}{P(X \geq s)} \overset{?}{=} P(X > t)$$

$$P(X > s+t) \overset{?}{=} P(X > t) \cdot P(X \geq s)$$

$$e^{-\lambda \cdot (s+t)} = e^{-\lambda \cdot (t)} \cdot \left(e^{-\lambda s} + P(X = s)\right)$$

$$e^{-\lambda \cdot (s+t)} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\lambda \cdot s} \quad \boxed{x}$$

h)

Doba ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 min.
Objednán Adam 10:00, Eva na 10:20.

a) Jaká je pst, že Adam skončí před Evou?

b) Jaká je střední hodnota času, co Eva bude čekat na Adama.

c) Jaká je střední doba času, kdy bude Eva vyzkoušena?

$$X \sim Exp(\lambda), \ E(X) = 20 \text{ min} \quad \lambda = \frac{1}{20}$$

a) $F_X(20) - P(X = 20) = F_X(20) - 0 = F_X(20) = 1 - e^{-1} \doteq 0{,}63212$

??

b) $\int_{20}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt = \int_{20}^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \frac{e^{-1} \cdot 2}{\frac{1}{400}} \doteq 14{,}715 \text{ min}$