Rozdělení ~ pst. fce

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_i P(A_i)$, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P(A_1\cap A_2 \cap \dots) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|P_1\cap P_2)\dots$

$P(A) = \sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)$, $P(B_j|A) = \frac{P(B_j)\cdot P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{P(B_j\cap A)}{P(A)}$, pokud B_i jsou rozklady Ω

A,B nezávislé, pokud $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, Pravděpodobnostní fce $P_X(x) = P(X=x)$, $\sum_x P_X(x) = 1$

$\mathbb{E}X = \sum_x x\cdot P(X=x)$, $\mathbb{E}(g(x)) = \sum_x g(x) P(X=x)$, $\mathbb{E}X \geq 0 \Rightarrow P(X\geq 0) > 0$, $P(X\geq 0)=1 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$

$\mathbb{E}(aX+b) = a\cdot\mathbb{E}X + b$, $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X+\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}(X|B) = \sum_x x\cdot P(X=x|B)$, $\mathbb{E}X = \sum P(B_i)\cdot\mathbb{E}(X|B_i)$, $\mathbb{E}X = \sum_n^\infty P(X>n)$

$Var(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2)$, $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$ – směrodatná odchylka, $P(X=\mathbb{E}X)=1 \Rightarrow Var(X)=0$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$, $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Bern. rozdělení: $X\sim Bern(p)$: $P_X(1) = p$, $P_X(0)=1-p$, $\mathbb{E}X = p$, $Var(X) = p\cdot(1-p)$, $I_i \sim Bern(P(A))$, indikátor jev

Geom. rozdělení: $X\sim Geom(p)$: $P_X(k) = (1-p)^{k-1} p$, $k=1,2,\dots$, $\mathbb{E}X = 1/p$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$, „kolikátým hodem jsem se trefil"

Binom. rozdělení: $X\sim Bin(n,p)$: $P_X(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, $\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = n\cdot p$, $Var(X) = \sum_i Var(X_i) = n\cdot p\cdot(1-p)$: $X_i \sim Bern(p)$
„počet trefení při n hodech"

Hypergeo. rozdělení: $X\sim Hyper(N,K,n)$: $P_X(k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $\mathbb{E}X = n\cdot\frac{K}{N}$, $Var(X) = n\cdot\frac{K}{N}\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$
„N míčků, K červených, vytahuji n, nevracím, kolik mám červených"

Poissonovo rozd.: $X\sim Pois(\lambda)$: $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\mathbb{E}X=\lambda$, $Var(X)=\lambda$ „počet doručených mailů, když λ je očekávaný počet"
Paradigma: $A_1 \dots A_n$ skoro nezávislé: $\sum_i I_{A_i} \sim Pois(\lambda)$, $P(A_i) = p_i$, $\sum_i p_i = \lambda$ pokud nezávislé: $P(X=x)\cdot P(Y=Z-x)$

X,Y d.n.v.:
$P_X(x) = P(X=x) = \sum_y P(X=x \wedge Y=y) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$, stejně pro y. $Z=X+Y$: $P(Z=z) = \sum_x P(X=x\wedge Y=z-x)$

X,Y d.n.v. nezávislé pokud: $P(X=x\wedge Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y)$, $Z=g(X,Y) \to P_Z = P(Z=z) = \sum_{x,y:\, g(x,y)=z} P(X=x\wedge Y=y)$

$\mathbb{E}(aX+bY) = a\cdot\mathbb{E}X + b\cdot\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$

$cov(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$ $var(X) = cov(X,X)$, $cov(X, aY+bZ+c) = a\cdot cov(X,Y) + b\cdot cov(X,Z)$

X,Y nezávislé $\Rightarrow cov(X,Y)=0$, Korelace $\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$

$X=\sum_i X_i \Rightarrow var(X) = \sum_i\sum_j cov(X_i,X_j) = \sum_i var(X_i) + \sum_{i\neq j} cov(X_i,X_j)$, speciálně pro $X_1 \dots X_n$ nez.: $var(X) = \sum var(X_i)$

Podmíněné rozdělení: $P_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y)$, $\frac{P_{X|Y}(x|y)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X|Y}(x|y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x'|y)}$

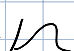
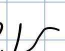
Spojitá náh. vel.: Distribuční fce: $F_X(x) := P(X\leq x)$, nekl., $\lim_{-\infty} = 0$, $\lim_{\infty} = 1$, $F_X(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$:= $f_X(t)$ je hustota

$P(X=x) = 0$, $P(a\leq X\leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$

$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,dx$, platí linearita, $var(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)^2) = \int_{-\infty}^\infty (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)\,dx = \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}X)^2$, $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x)\,dx$

Uniformní rozd.: $X\sim U(a,b)$ pokud $f_X(x) = 1/(b-a)$, $F_X(x) = (x-a)/(b-a)$, $\mathbb{E}X = (a+b)/2$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponenciální rozd.: $F_X(x) = 1-e^{-\lambda x}$ $x\geq 0$, jinak 0, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x\geq 0$, jinak 0, F_X: , f_X:  „čas před příchodem nového kamoš"
$\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $Var(X) = 1/\lambda^2$

Normální rozdělení: $X\sim N(0,1)$: $f_X = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$, $F_X(x) = \Phi = \varphi^{-1}$, Pro $X\sim N(0,1)$: $\mathbb{E}X=0$, $Var(X)=1$, F_X: , f_X 
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ pokud $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$; $Z\sim N(0,1) \to f_X = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $\mathbb{E}X=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$, součet nor. rz. je nor. rz.

Sdružená distr. fce: $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$, $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

Nezáv. spoj. vel.: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Konvoluce: X, Y spojité n.n.v. $Z = X + Y$ je taky spoj. n.v. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$

Podmíněná distr. fce: $F_{X|B}(x) := P(X \leq x | B)$, $f_{X|B}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X \in S)}$, pokud $x \in S$, pro $B = \{X \in S\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}$

$F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x)$, $f_X(x) = \sum_i P(B_i) \cdot f_{X|B_i}(x)$, $f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$, obdobně pro y.

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $E(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,dx$, pokud $B_1 - B_n$ rozklad, pak $EX = \sum_i E(X|B_i) \cdot P(B_i)$

Nerovnosti: $X \geq 0$, $a > 0$: $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$, pokud $a = b \cdot EX \rightarrow P(X \geq b \cdot EX) \leq \frac{1}{b}$

Kvantilová fce: $Q_X(p) := \min\{x \in \mathbb{R} : p \leq F_X(x)\}$, $Q_X = F_X^{-1}$, pokud F_X spoj.

$Q_X(p) \leq x \iff p \leq F_X(x)$ $\rightarrow$ první kvartil je hodnota $q = Q_X(1/4)$, že 1/4 hodnot je $\leq q$
$(P(X \leq q) \leq 1/4)$