Rozdělení ~ pst. fce

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_i P(A_i)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots$

$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)$, $P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)} = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$, pokud B_i jsou rozklady Ω

A, B nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, Pravděpodobnostní fce $p_X(x) = P(X = x)$, $\sum_x p_X(x) = 1$

$\mathbb{E}X = \sum_x x \cdot P(X = x)$, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x) P(X = x)$, $\mathbb{E}X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0$, $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$

$\mathbb{E}(aX + b) = a \cdot \mathbb{E}X + b$, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}(X|B) = \sum_x x \cdot P(X = x | B)$, $\mathbb{E}X = \sum P(B_i) \cdot \mathbb{E}(X|B_i)$, $\mathbb{E}X = \sum_n^{\infty} P(X > n)$

$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$, $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$ – směrodatná odchylka, $P(X = \mathbb{E}X) = 1 \Rightarrow Var(X) = 0$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Bern. rozdělení: $X \sim Bern(p)$: $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$, $\mathbb{E}X = p$, $Var(X) = p \cdot (1-p)$, $I_i \sim Bern(P(A))$, indikátor jevu

Geom. rozdělení: $X \sim Geom(p)$: $p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, $k = 1, 2, \dots$, $\mathbb{E}X = 1/p$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$, „kolikátým hodem jsem se trefil"

Binom. rozdělení: $X \sim Bin(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = n \cdot p$, $Var(X) = \sum_i Var(X_i) = n \cdot p \cdot (1-p)$: $X_i \sim Bern(p)$

„počet trefení při n hodech"

Hypergeo. rozdělení: $X \sim Hyper(N, K, n)$: $p_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $\mathbb{E}X = n \cdot \frac{K}{N}$, $Var(X) = n \cdot \frac{K}{N} \cdot (1 - \frac{K}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

„N míčků, K červených, vytahuji n, nevracím, kolik mám červených"

Poissonovo rozd.: $X \sim Pois(\lambda)$: $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\mathbb{E}X = \lambda$, $Var(X) = \lambda$ „počet obsloužených mailů, když λ je očekávaný počet"

Paradigma: $A_1 \_ A_n$ skoro nezávislé: $\sum_i I_{A_i} \sim Pois(\lambda)$, $P(A_i) = p_i$, $\sum_i p_i = \lambda$

X, Y d.n.v.:

$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x \wedge Y = y) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$, stejně pro y.

$Z = X + Y$: $P(Z = z) = \sum_x P(X = x \wedge Y = z - x)$ pokud nezávislé: $P(X = x) \cdot P(Y = z - x)$

X, Y d.n.v. nezávislé pokud: $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, $Z = g(X, Y) \to p_Z = P(Z = z) = \sum_{x, y : g(x, y) = z} P(X = x \wedge Y = y)$

$\mathbb{E}(aX + bY) = a \cdot \mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

$cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ $var(X) = cov(X, X)$, $cov(X, aY + bZ + c) = a \cdot cov(X, Y) + b \cdot cov(X, Z)$

X, Y nezávislé $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$, korelace $\varrho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$

$X = \sum_i X_i \Rightarrow var(X) = \sum_i \sum_j cov(X_i, X_j) = \sum_i var(X_i) + \sum_{i \neq j} cov(X_i, X_j)$, speciálně pro $X_1 \_ X_n$ nez.: $var(X) = \sum_i var(X_i)$

Podmíněné rozdělení: $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x | Y = y)$, $\frac{p_{X|Y}(x|y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{X|Y}(x|y)}{\sum_{x'} p_{X,Y}(x'|y)}$

Spojitá náh. vel.: Distribuční fce: $F_X(x) := P(X \leq x)$, nekl., $\lim_{-\infty} = 0$, $\lim_{\infty} = 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$:= $f_X(t)$ je hustota

$P(X = x) = 0$, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\, dt$

$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$, platí linearita, $var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x)\, dx = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$, $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$

Uniformní rozd.: $X \sim U(a, b)$ pokud $f_X(x) = 1/(b-a)$, $F_X(x) = (x-a)/(b-a)$, $\mathbb{E}X = (a+b)/2$, $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponenciální rozd. $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$, jinak 0, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$, jinak 0, F_X: , f_X: „čas před příchodem nového kamoše"

$\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $Var(X) = 1/\lambda^2$

Normální rozdělení: $X \sim N(0, 1)$: $f_X = \varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-x^2/2}$, $F_X(x) = \Phi = \varphi^{-1}$, Pro $X \sim N(0,1)$: $\mathbb{E}X = 0$, $Var(X) = 1$, F_X: , f_X

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ pokud $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $Z \sim N(0, 1) \to f_X = \frac{1}{\sigma} \varphi(\frac{x - \mu}{\sigma})$, $\mathbb{E}X = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$, součet nor. roz. je nor. roz.

Sdružená distr. fce: $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \land Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$, $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\, \partial y}$

Nezáv. spoj. vel: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) = P(X \le x \land Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Konvoluce: X, Y spojité n.n.v. $Z = X + Y$ je taky spoj. n.v. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$

Podmíněná distr. fce: $F_{X|B}(x) := P(X \le x \mid B)$, $f_{X|B}(x) = \dfrac{f_X(x)}{P(X \in S)}$, pokud $x \in S$, pro $B = \{X \in S\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}$

$F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x)$, $f_X(x) = \sum_i P(B_i) \cdot f_{X|B_i}(x)$, $f_X(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$, obdobně pro y.

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $\mathbb{E}(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)\,dx$, pokud $B_1 - B_n$ rozklad, pak $\mathbb{E}X = \sum_i \mathbb{E}(X|B_i) \cdot P(B_i)$

Nerovnosti: $X \ge 0$, $a > 0$: $P(X \ge a) \le \dfrac{\mathbb{E}X}{a}$, pokud $a = b \cdot \mathbb{E}X \to P(X \ge b \cdot \mathbb{E}X) \le \dfrac{1}{b}$

Kvantilová fce: $Q_X(p) := \min\{x \in \mathbb{R} : p \le F_X(x)\}$, $Q_X = F_X^{-1}$, pokud F_X spoj.

$Q_X(p) \le x \iff p \le F_X(x) \to$ první kvartil je hodnota $q = Q_X(1/4)$, že $1/4$ hodnot je $\le q$

$(P(X \le q) \le 1/4)$