Přednáška po dvou týdnech volna.

Statistika

$X_1 - X_n \sim F_v$ n.n.v. se stejným rozdělením

to je popsáno d.f. F_v, v ... parametr

$Pois(\lambda)$ $v = \lambda$

$N(\mu, \sigma^2)$ $v = (\mu, \sigma)$

Def: Bodové odhady

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \dots \text{ výběrový průměr}$$

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

.... skoro jako rozptyl, jen to nedělám přes střední hodnotu, ale výběrový průměr. (a proto $\frac{1}{n-1}$ místo $\frac{1}{n}$)

Thm:
1) $\overline{X}_n$ je konzistentní nevychýlený odhad pro $E(X_1)$
2) $\hat{S}_n^2$ je —//— pro $Var(X_1)$

$$\underbrace{E\overline{X}_n}_{\text{odhad}} = \underbrace{EX}_{\text{skutečnost}}$$

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} X_n$$

MSE: (mean-square-error)

$$= E(\overline{X}_n - EX)^2$$ ⟶ chceme co nejmenší.

Def: Intervalové odhady

— Určíme dvě statistiky T_1, T_2 // funkce těch měřených veličin $X_1 - X_n$

$$P(T_1 < g(v) < T_2) = 1-\alpha, \quad \text{např: } 95\%$$

→ ten parametr v může být dvojrozměrný

$$g(v) \in \underbrace{\langle T_1, T_2 \rangle}_{\text{int. odhad}} \text{ s velkou pravděpodobností.}$$

Thm: Int. odhad norm. náh. veličiny

$$X_1 - X_n \sim N(v, \sigma^2) \quad \to \text{známe}$$

$$\Phi(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$$

$$C_n = \langle \bar{X}_n - \delta, \bar{X}_n + \delta \rangle, \quad \text{kde } \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}$$

Potom $P(C_n \ni v) = 1 - \alpha$

Dk: Chceme otestovat: $\bar{X}_n - \delta \le v \le \bar{X}_n + \delta$

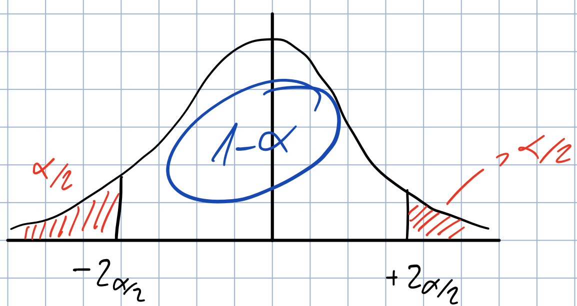
$$-\delta \le \bar{X}_n - v \le \delta$$

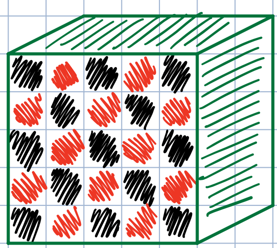
$$-z_{\alpha/2} \le \boxed{\frac{\bar{X}_n - v}{\sigma/\sqrt{n}}} \le +z_{\alpha/2}$$

// Y_n v cent. lim. větě … standardizace $\bar{X}_n$

$Y_n \sim N(0,1)$

$$P(-z_{\alpha/2} \le Y_n \le +z_{\alpha/2}) = \Phi(z_{\alpha/2}) - \Phi(-z_{\alpha/2}) = (1-\alpha/2) - \alpha/2 = 1-\alpha$$





Co když neznáme σ^2 ?

$X_1 \dots X_n \rightsquigarrow \overline{X}_n$ ... odhad ν

$\hat{S}_n^2$ ... odhad σ^2

asi chceme: $\delta \overset{?}{=} \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} \cdot z_{\alpha/2}$ a vzít interval $\langle \overline{X}_n - \delta, \overline{X}_n + \delta \rangle$

budeme zkoumat n.v. $\frac{\overline{X}_n - \nu}{\hat{S}_n / \sqrt{n}}$ $\longrightarrow$ $X_1 \dots X_n \sim N(\nu, \sigma^2)$

Def: Studentovo distribuce (neboli t-distribuce)

distr. fce: Ψ_{n-1} studentovo rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti.

tedy: $\delta = \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$, kde $z_{\alpha/2}$ t.ž. $\Psi_{n-1}(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

pak v důkazu:

$$P(-z_{\alpha/2} \le Y_n \le z_{\alpha/2}) = \Psi(z_{\alpha/2}) - \Psi(-z_{\alpha/2})$$

Pozn: to „n" je celkový počet měření. Musí být > 1, abych vůbec měl možnost spočítat rozptyl. Zároveň čím více měření, tím víc se přiblížím $N(0,1)$.

Testování hypotéz

Př: Zajímá nás, jestli $\# ♀ \overset{?}{=} \# ♂$ $\longrightarrow$ novorozených...

Kdyby to bylo stejné v průměru, tak potom v každém roce je
- $\to$ ♂ > ♀ s pstí $1/2$
- $\to$ ♂ < ♀ s pstí $1/2$
- ♂ = ♀ s pstí 0

Vyšlo: v 82 po sobě jdoucích letech $\# ♂ > \# ♀$

Proč? To se stane náhodně na $\left(\frac{1}{2}\right)^{82}$ $\longrightarrow$ což je sakra malé číslo.

A je velmi nepravděpodobné, že bychom byli svědky takové „náhody"!

Co pak ale s odchylkami od průměru?

Postup při šmidlování s hypotézou:

Nulová hypotéza: H_0 „default" ... mince je spravedlivá (obě strany padají stejně často)

alternativní hypotéza: H_1 „objev" ... mince je cinknutá

Buď zamítneme H_0, nebo řekneme, že nevíme.

1) Vybereme vhodný model

2) Vybereme α, např.: 0,05

3) Určíme testovou statistiku T ~> fce $h(\underbrace{X_1 - X_n}^{\text{n.v.}})$

4) Určíme kritický obor W

5) Naměříme data $x_1 - x_n \in \mathbb{R}$ --> měříme až nakonec, abychom nepreferovali nějaký lepší model

6) Zamítneme H_0, pokud $t = h(\underbrace{x_1 - x_n}_{\text{naměřené hodnoty}}) \in W$

$\alpha = P$(zamítneme H_0, která platí) ~ chyba I. druhu. --> falešně řekneme, že mince je cinklá.

$\beta = P$(nezamítneme H_0, i když neplatí) ~ chyba II. druhu. -> falešně ignorujeme, že mince je cinklá.

Obecně volíme α (vzhledem k oborům a pokusům), spočteme n, aby β bylo přiměřeně malé.

$(1-\beta)$ ... síla testu. ~ čím více měření, tím zjevně silnější.

Př.: Házíme mincí, chceme ji otestovat

H_0: mince je spravedlivá.

1) $X_1 - X_n \sim \text{Bern}(p)$

2) $\alpha = 0,05$

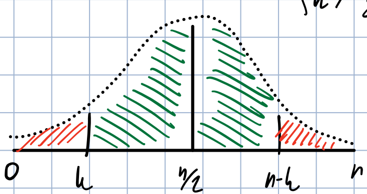
3) $T = X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Bin}(n, 1/2)$ -> předpokládáme, že H_0 platí.

4) $W = \{0..k\} \cup \{n-k..n\}$ ~> ten součet by měl být někde okolo středu

(oboustranný test)

5)

$\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$



~ pozor, není to norm. rozd., je to disk.

Jaká je P(chyby I. druhu)?

$$= P\left(Bin\left(n, \tfrac{1}{2}\right) \leq k\right) + P\left(Bin\left(n, \tfrac{1}{2}\right) \geq n-k\right) \doteq \alpha$$

takle chceme

- když $n = 1000$, 472 orel, 528 panna. Jaký je výsledek?

pro $\alpha = 0{,}05$ je $k = 469$, tedy jsme hodně blízko.

Def: p-hodnota:

— místo True/False přijmutí vyjádřím, jak moc/málo jsem od hypotézy.

:= pravděpodobnost, že výsledky dopadnou „≥" než je naše měření.

Pokud p-hodnota je menší než α, zamítáme H_0.