Kl. prostor: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ — kombinace plní míčků

Disk. prostor: $P(A)=\sum_{\omega\in A} p(\omega)$ — kombinace plní míčků, každý má jinou pst.

Hod dvěma kostkami: $\Omega=\{2 \_ 12\}$

↳ $\{1 \_ 6\}^2$ --> tohle je model, co všechno můžu hodit

Geom. pst. prostor: --> příklad: hod na terč

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$P(A)=\frac{V_d(A)}{V_d(\Omega)}$$ ~> d-rozměrný objekt

$d=1$ -> přímka...

$d=2$ -> obsah...

$\mathcal{F}$ - množ., kde V_d je def.

↳ Chceme ale alt. disk. prostoru

Vážený (spojitý) geom. prostor:

$$\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$$

$$f:\Omega\to\mathbb{R}_0^+$$

tž. $$\int_\Omega f(x)\,dx=1$$

$$P(A)=\int_A f(x)\,dx$$

integrace 1 := to je výpočet n-rozměrného objemu

Platí: $P(\Omega)=1$ ✓

Platí axiom se sčítáním (sčítám pst => sčítám objem)

Podmíněná pravděpodobnost: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A|B)$ --> to co vím

↳ tomu, čemu počítám pst

Pokud $B=\Omega$, pak $P(B)=1$, $P(A\cap B)=P(A)$:= $P(A|\Omega)=P(A)$

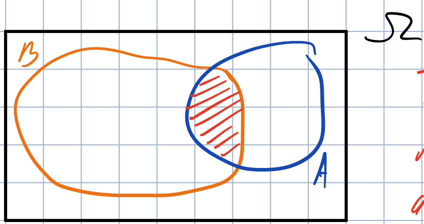
Thm: Mějme $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $B\in\mathcal{F}$, $P(B)>0$.

Mějme $Q(A):=P(A|B)\ \forall A\in\mathcal{F}$.

Pak $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ je pst. prostor.

Tedy všechny pravidla platí i pro podprostory.

Dk:



Takže se vlastně zaměřím jen na tu podmínk. Musím ale stále brát v potaz $P(B)$

!: $Q(\Omega)\neq P(\Omega\cap B)=P(B)\neq 1$

$$Q(\Omega)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

Po rozpočítání dostávám podm. pst -->

$$Q(A_1\cup A_2\cup\dots)=P((A_1\cup A_2\cup\dots)\cap B)/P(B)=Q(A_1)+Q(A_2)+\dots$$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ → toto je ještě intuitivnější

Př: Mám 32 karet, 8 od barvy

$A_1, A_2, \dots A_i$, kde $A_i :=$ i-tá karta je srdcová.

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31}$

předpoklad, že jsem uspěl v prvním kolu

Co když: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$

$= \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30}$

Thm: Řetězení průniků:

$A_1 \dots A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_1 \cap \dots) > 0$, pak

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Dk:

$$\cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\boxed{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

zde překvapivě nezáleží na pořadí

Thm: Věta o rozboru možností (věta o celkové pravdivosti)

$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$, kde $A \in \mathcal{F}$, $B_1, B_2 \dots$ tvoří rozklad Ω

B_i je konečný nebo spočetný

$\Omega = \bigcup_i B_i$, kde $B_i \cap B_j = \emptyset : i \neq j$

Dk: $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$

$= P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \dots$ a již mám induktivní předpis

$= \sum_i P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$

Dává smysl počítat jen nad neprázdnými B_i množinami

Př: $B_1 =$ „prší"

$B_2 =$ „sněží"

$B_3 =$ „nic nepadá"

$A =$ „jdu na výlet"

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + P(B_3) \cdot P(A \mid B_3)$

prší a jdu na výlet; sněží a jdu na výlet; je pěkně a jdu na výlet

→ Rozeberu tedy všechny stavy a sečtu dané pod. psti.

Př: a Kč, $0 \le a \le n$

Gambler's-ruin problem

Opakovaně: hra o 1 Kč, $P(+1) = \frac{1}{2}$, $P(-1) = \frac{1}{2}$

Konec: 0 nebo n Kč.

$P(\text{vyhraje}) = ?$

B_1 = výhra v 1. kole

$B_2 = B_1^c$

$$P(V) = P(B_1) \cdot P(V|B_1) + P(B_2) \cdot P(V|B_2)$$

$$\underset{f(a)}{\parallel} \qquad \tfrac{1}{2} \qquad f(a+1) \qquad \tfrac{1}{2} \qquad f(a-1)$$

$f(0) = 0$

$f(n) = 1$ ... $f(a) = \frac{a}{n}$

↳ Tohle už je poctivý předpis pro řešení

Thm: Bayesova věta:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad A \in \mathcal{F},\ B_i \text{ jsou rozklady } \Omega,\ P(B_i) > 0,$$

nulové $P(B_i)$ nepočítáme

Dk:

$$= \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\text{„věta o rozboru možností"}} \quad \boxed{X}$$

Př: N: nemoc, $P(N) = \frac{1}{1000}$

T: test vyšel pozitivní, sensitivita $:= \frac{95}{100} = P(T|N)$

specificita $:= \frac{95}{100} = P(T^c|N^c)$

$P(N|T) = ?$

$A = T$

$B_1 = N$

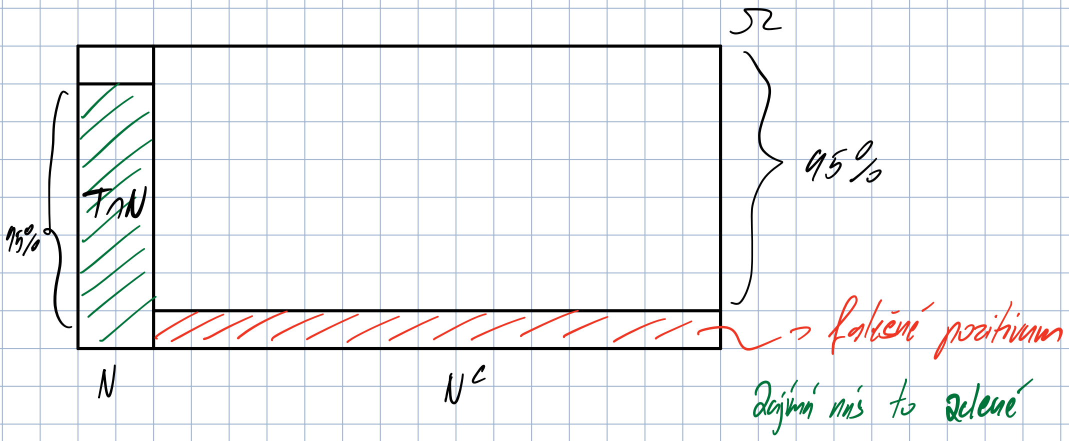
$B_2 = N^c$

$$P(N|T) = \frac{P(N) \cdot P(T|N)}{P(N) \cdot P(T|N) + P(N^c) \cdot P(T|N^c)} =$$

↳ jde o triviální doplněk, tedy $P(N) + P(N^c) = 1$ ↳ to ale musí platit pro $P(T|N) + P(T|N^c) = 1$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100}} =$$

$= 1{,}8\,\%$



Df: Nezávislé jevy: $A, B \in \mathcal{F}$: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pokud $P(B) > 0$: A, B nez. pokud $P(A) = P(A|B)$