Kl. prostor: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — krabice plná míčků

Disk. prostor: $P(A) = \sum_{w \in A} p(w)$ – krabice plná míčků, každý má jinou pst.

Hod dvěma kostkami: $\Omega = \{2 \_ 12\}$

↳ $\{1 \_ 6\}^2$ --> tohle je model, co všechno můžu hodit

Geom. pst. prostor: --> příklad: hod na terč

$\Omega \in \mathbb{R}^d$

$P(A) = \frac{V_d(A)}{V_d(\Omega)}$ ~> d-rozměrný objekt

$d=1$ --> přímka...

$d=2$ --> obsah...

$\mathcal{F}$ - množ., kde V_d je def.

↳ Chceme ale alt. disk. prostoru

Vážený (spojitý) geom. prostor:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$f: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$

tž. $\int_\Omega f(x)\,dx = 1$

$P(A) = \int_A f(x)\,dx$

integrace 1 := to je výpočet n-rozměrného objemu

Platí: $P(\Omega) = 1$ ✓

důkaz

Platí axiom se sčítáním (sčítám pst ==> sčítám objem)

Podmíněná pravděpodobnost: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A|B)$ --> to co vím

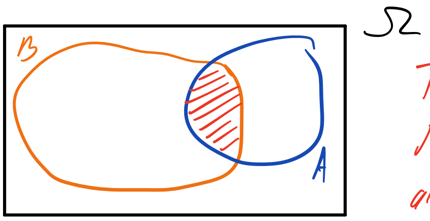
↳ tomu, čemu počítám pst

Pokud $B = \Omega$, pak $P(B) = 1$, $P(A \cap B) = P(A)$:= $P(A|\Omega) = P(A)$

Thm: Mějme $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$.
Mějme $Q(A) := P(A|B)$ $\forall A \in \mathcal{F}$.
Pak $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ je pst. prostor.

Tedy všechny pravidla platí i pro podprostory.

Dk:



Takže se vlastně zaměřím jen na ten průnik. Musím ale stále brát v potaz $P(B)$

∇: $Q(\Omega) \neq P(\Omega \cap B) = P(B) \neq 1$

$Q(\Omega) = \underline{\frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)}} = \underline{\frac{P(B)}{P(B)}} = 1$

Po rozpočítání dostávám --> podm. pst

$Q(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P((A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap B) / P(B) = Q(A_1) + Q(A_2) + \ldots$

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B)$$ —> toto je ještě intuitivnější

Př: Mám 32 karet, 8 od barvy

$A_1, A_2, \ldots A_i$, kde $A_i :=$ i-tá karta je srdcová.

$$P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1) = \frac{8}{32}\cdot\frac{7}{31}$$

předpoklad, že jsem uspěl v prvním kroku

Co když: $P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)$
$= \frac{8}{32}\cdot\frac{7}{31}\cdot\frac{6}{30}$

Thm: Zřetězení pravidla:

$A_1 \ldots A_n \in \mathfrak{F}$, $P(A_1\cap\ldots) > 0$, pak

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n\Big|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Dk:

$$\cancel{P(A_1)}\cdot\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\cdot\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}\cdot\ldots\cdot\frac{\boxed{P(A_1\cap\ldots\cap A_n)}}{\cancel{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})}}$$

Zde překvapivě nezáleží na pořadí

Thm: Věta o rozboru možností (věta o celkové pravděpodobnosti)

$P(A) = \sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)$, kde $A\in\mathfrak{F}$, $B_1, B_2\ldots$ tvoří rozklad Ω

B_i je konečný nebo spočetný

$\Omega = \bigcup_i B_i$, kde $B_i\cap B_j = \emptyset : i\neq j$

Dk: $A = (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots$

$= P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + \ldots$ a již mám induktivní předpis

$= \sum_i P(B_i)\cdot P(A|B_i)$ 💡 Dává smysl počítat jen nad neprázdnými B_i množinami

Př: $B_1 =$ „prší"
$B_2 =$ „sněží"
$B_3 =$ „nic nepadá"
$A =$ „jdu na výlet"

$$P(A) = \underbrace{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}_{\text{prší a jdu na výlet}} + \underbrace{P(B_2)\cdot P(A|B_2)}_{\text{sněží a jdu na výlet}} + \underbrace{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}_{\text{je pěkně a jdu na výlet}}$$

—> Rozeberu tedy všechny stavy a sečtu dané podm. psti.

Gamblers–ruin problem

Př: a kč, $0 \le a \le n$

Opakovaně: hra o 1 kč, $P(+1) = \frac{1}{2}$, $P(-1) = \frac{1}{2}$

Konec: 0 nebo n kč.

$P(\text{vyhraje}) = ?$

$B_1 =$ výhra v 1. kole

$B_2 = B_1^c$

$$P(V) = P(B_1) \cdot P(V|B_1) + P(B_2) \cdot P(V|B_2)$$

$$\overset{\shortparallel}{f(a)} \qquad \tfrac{1}{2} \qquad f(a+1) \qquad \tfrac{1}{2} \qquad f(a-1)$$

$$f(0) = 0 \qquad \ldots \qquad f(a) = \frac{a}{n}$$
$$f(n) = 1$$

↳ Tohle už je pohodlný předpis pro řešení

Thm: Bayesova věta:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

, $A \in \mathcal{F}$, B_i jsou rozklady Ω, $P(B_i) > 0$,

nulové $P(B_i)$ nepočítáme

Dk:

$$= \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\text{„věta o rozboru možností"}} \qquad \boxed{X}$$

Př: N: nemoc, $P(N) = \frac{1}{1000}$

T: test vyšel pozitivní, sensitivita $:= \frac{95}{100} = P(T|N)$

specificita $:= \frac{95}{100} = P(T^c|N^c)$

$$P(N|T) = ?$$

$A = T$

$B_1 = N$

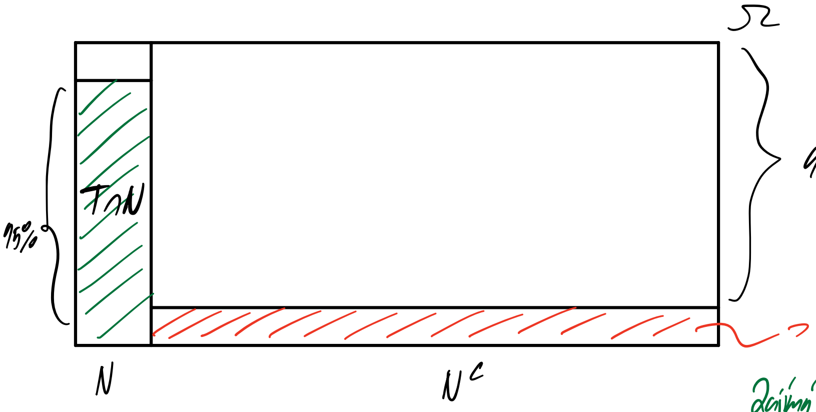
$B_2 = N^c$

$$P(N|T) = \frac{P(N) \cdot P(T|N)}{P(N) \cdot P(T|N) + P(N^c) \cdot P(T|N^c)} =$$

↳ jde o triviální doplněk, tedy $P(N) + P(N^c) = 1$ ↳ to ale musí platit pro $P(T|N) + P(T|N^c) = 1$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100}} =$$

$$= 1{,}8\,\%$$



→ falešné pozitivum

zajímá nás to zelené

Df: Nezávislé jevy:

$A, B \in \mathcal{F}$: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Pokud $P(B) > 0$: A, B nez. pokud $P(A) = P(A|B)$