Def: Jevy $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou nezávislé pokud:

$$\forall J \subseteq \{1..n\} \quad P\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

Diskrétní náhodné veličiny

Def: Diskrétní náh. veličina je: $X: \Omega \to \mathbb{R}$ t.ž.

(obor hodnot) $H(X)$ je nejvýše spočetný

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

↳ tedy umím zjistit pst.

Lze vytvořit nový pst. prostor:

$\Omega' = H(X)$ → dívám se tedy jen na hodnoty X

rozdělení X

distribuce X

$\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$

$P(\{x\}) = P(X = x)$

Pro disk. n.v. je to diskrétní pst. prostor.

Def: Pravděpodobnostní funkce $p_X(x) = P(X = x)$

$$\sum_{x\in H(X)} p_X(x) = 1$$

Dk:

$$\Omega = \bigcup_{x} \{X = x\}$$

$$P(\Omega) = \sum_{x} P(\{X = x\}) = 1$$

Př:

1) Bernoulliho rozdělení:

$X: \Omega \to \{0,1\}$, $\quad P(X = x) = p \quad = p_X(1)$

↳ X detekuje úspěch $\quad P(X \neq x) = 1 - p \quad = p_X(0)$

$X \sim Ber(p)$

Def: Indikátorová n.v. $A \in \mathcal{F}$: $\quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1 : \omega \in A \\ 0 : \omega \notin A \end{cases} \qquad I_A \sim Ber(P(A))$

2) Geometrické rozdělení $X \sim Geo(p)$

motivace: čekání na úspěch, kolikátým pokusem uspěje, když pst. úspěchu je p.

Def: $X \sim Geo(p)$

$X: \Omega \to \{1, 2, \dots\}$

$$P_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{(1-p)^0 \cdot p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

3) Binomické rozdělení: $X \sim Bin(n, p)$

motivace: počet úspěchů z n pokusů

$H(X) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad k = 0 \dots n$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

4) Hypergeometrické rozdělení $X \sim Hypergeo(N, K, n)$

motivace: # červených míčků při tahání bez opakování

$$P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \dots \doteq \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

$\hookrightarrow$ pokud $n \ll N$

5) Poissonovo rozdělení $X \sim Pois(\lambda)$

$H(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\to$ počítá počet SMS za den

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda}} = 1$$

$X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ $n > \lambda$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \overbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}}^{1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}^{e^{-\lambda}} \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}^{1}$$

Tedy zjevně Poiss je aprox. Bin. rozdělení

Def: Poissonovo paradigma:

$A_1, A_2 \ldots$ skoro nezávislé jevy, t.ž. $\sum P(A_i) = \lambda$,

pak $\sum I_{A_i}$ je přibližně $\sim Pois(\lambda)$

Def: Střední hodnota $\mathbb{E}X = \sum_{x \in H(X)} P(X = x) \cdot x$