Def: $\mathbb{E}X = \sum_{x\in H(X)} x\cdot P(X=x)$

Př: $X \sim Bern(p)$: $H(X)=\{0,1\}$

$\mathbb{E}X = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) = p$ → téměř až intuitivní

↳ reprezentuje to průměrnou hodnotu veličiny

↳ průměrná hodnota hodu kostkou je 3,5, např.

Př: $X \sim Bin(n,p)$, $H(X) = \{0 \ldots n\}$

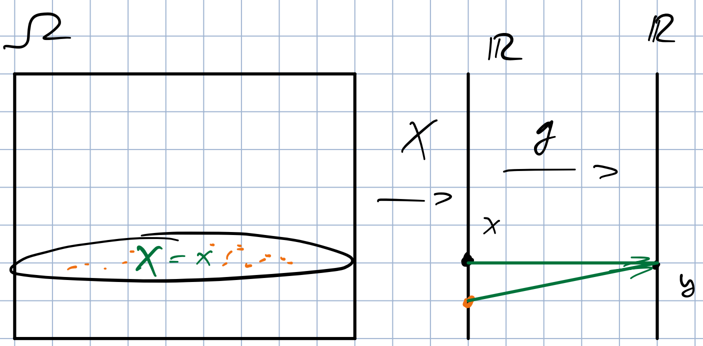
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k\cdot\binom{n}{k}}_{n\cdot\binom{n-1}{k-1}}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} =$$

$$= p\cdot n\cdot \underbrace{\sum_{k-1=0}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}\cdot(1-p)^{(n-1)\cdot(k-1)}}_{(p+(1-p))^{n-1}=1}$$

Př: $X \sim Geom(p)$ X= kolikátým hodem padla 6? $\mathbb{E}X = ?$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot p\cdot(1-p)^{k-1} = \ldots = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = 6$$



💡 $\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\{\omega\})$

To se podívá na pravděpodobnost této množiny

Tudíž vynásobením dané hodnoty získám střední hodnotu

Funkce disk. náh. vel.

X _ d.n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$Y = g(X) = g\circ X : \Omega \to \mathbb{R}$

$Y(\omega) = g(Y(\omega))$ je nejvýše spočetný

💡 Y je také d.n.v. → $|H(Y)| \le |\mathbb{N}|$

→ $\{Y=y\} \in \mathcal{F}\ \forall y\in\mathbb{R}$

$= \bigcup_{x:\, g(x)=y \text{ and } x\in H(X)} \{X=x\}$ → všechna x, která se zobrazí na y.

→ to celé $\in \mathcal{F}$, protože X je d.n.v.

Thm. PNS (problém unaveného statistika):

$$\mathbb{E}Y = \sum_{x\in H(X)} g(x)\cdot P(X=x)$$

ukázka výše

(opak.) Def: $\mathbb{E}Y = \sum_{y\in H(Y)} y\cdot P(Y=y)$

$$= \sum_{y\in H(Y)} y\cdot P\Big(\bigcup_{\substack{x\in H(X)\\ g(x)=y}} \{X=x\}\Big)$$

$$= \cancel{\sum_{y}} \sum_{x\in H(X)} g(x)\, P(X=x)$$

každé x se vybere jen jednou, jinak by platilo $g(x)=y_1$, $g(x)=y_2$, $y_1\neq y_2$ $\boxed{\text{↯}}$

Thm: (Vlastnost $\mathbb{E}$)

$X, Y \ldots$ d.n.v.

1) $P(X\geq 0)=1 \Rightarrow \mathbb{E}(X)\geq 0$ $\;\to$ pokud $\mathbb{E}(X)=0 \Rightarrow P(X=0)=1$

2) $\mathbb{E}(X)\geq 0 \Rightarrow P(X\geq 0)>0$ $\;\to$ musí tam určitě být nějaký nezáporný prvek.

3) $\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X)+b$

4) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

Linearita střední hodnoty

Dk 3:

$g(x)=ax+b,\quad Y=g(X)=aX+b$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_x (ax+b)\cdot P(X=x) = \overbrace{\sum_x a\underbrace{x P(X=x)}_{\mathbb{E}X}}^{a\cdot\mathbb{E}X} + \overbrace{\sum_x b\underbrace{P(X=x)}_{=1}}^{b}$$

$$= a\cdot\mathbb{E}X + b$$

D součtení sumy:

Dk 4:

jen pro $|\Omega|\leq|\mathbb{N}|$:

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\{\omega\})$$

$$\mathbb{E}Y = \sum_{\omega} Y(\omega)\cdot P(\{\omega\})$$

$$\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y = \sum_{\omega}\big(X(\omega)+Y(\omega)\big)\cdot P(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X+Y)$$

Dk 1:

$$\mathbb{E}X = \sum_{x\geq 0} \underbrace{x}_{\geq 0}\cdot\underbrace{P(X=x)}_{\geq 0} + \sum_{x<0} x\cdot \overbrace{P(X=x)}^{=0}$$

Dk 2: Obrácená implikace (důkaz) je přesně věta 1). $\boxtimes$

Př.: U_1 uniformní na $(\{1-6\})$

U_2 — 0 pokud $k_1 \neq 6$; $\text{unif}(1-6)$

U_2' = jako U_2, ale $U_1 \neq 1$

$X = U_1 + U_2$

$Y = U_1 + U_2'$

X: Pokud $x=6$, házím znovu, sčítám obě.

Y: Pokud $x=1$, házím znovu, sčítám obě.

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2 = \frac{49}{12}$$

$$1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} \cdots = \frac{7}{2}$$

$$\sum_k k \cdot P(U_2 = k)$$

$$= 0\cdot\frac{5}{6} + 1\cdot\frac{1}{6^2} + 2\cdot\frac{1}{6^2}\cdots + 6\cdot\frac{1}{6^2} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}U_1 + \mathbb{E}U_2' = \frac{49}{12}$$

Sice je střední hodnota stejná, ale distribuce bude jiná!

Př.: $X \sim Bin(n,p)$ $\quad p = \frac{1}{6}$

$\mathbb{E}X = ? = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \ldots + \mathbb{E}X_n = \underline{n\cdot p}$

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

$X_i = I\{6 \text{ na } i\text{-té kostce}\}$

$X_i \sim Bern(p)$

$\mathbb{E}X_i = p$

Def: Podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E}(X \mid B) := \sum_{x \in H(X)} x \cdot P(X = x \mid B), \quad P(B) > 0, \quad X \text{.. d.n.v}$$

Thm: O celkové střední hodnotě (o rozboru případů)

Pokud $B_1, B_2, \ldots$ tvoří rozklad Ω, X je d.n.v., tak $\mathbb{E}X = \sum_i P(B_i)\cdot\mathbb{E}(X \mid B_i)$

Př.: $X \sim Geom(p)$ (Kolikrát jsem hodil, než padla 6?)

$B_1 = \{\text{první hod } 6\}$

$B_2 = B_1^C$

$$\mathbb{E}X = P(B_1)\cdot\mathbb{E}(X \mid B_1) + P(B_2)\cdot\mathbb{E}(X \mid B_2)$$

$$= p \cdot 1 + (1-p)\cdot(1 + \mathbb{E}(X))$$

$$p\cdot\mathbb{E}X = 1 \implies \mathbb{E}X = \frac{1}{p}$$

Thm: $X \sim$ d.n.v., $H(X) \subseteq \mathbb{N}_0$

Pak $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$

Dk:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_{X>n}$$

$\longrightarrow$ mějme třeba $X=15$, pak vpravo mám $15\times$ jedničku, které se sečte na to stejné.

Díky linearitě: $\mathbb{E}X = \sum \mathbb{E} I_{X>n}$

Př: i-tý hod kostkou a padnutí 6ky

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} P(\underbrace{X > n}_{\text{nepadla 6 při hodech } 1,2 \ldots n})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

↳ dokud nepadla 6ka

? $\mathbb{E}(X^2) \overset{?}{>} (\mathbb{E}X)^2$

Def: Rozptyl n.v. X je $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$

Thm: $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \geq 0$