

Def: Rozptyl:  $\text{var}(X) = E((X - E(X))^2)$

↳ doslovný popis toho, jak je  $X$  rozptýlená.

Thm:  $\text{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$

Důk: označme  $\mu = EX$ . Pak  $\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) =$   
 $= EX^2 - 2\mu EX + \mu^2$   
 $= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2$   
 $= EX^2 - (EX)^2 \quad \square$

Důsledek:  $EX^2 \geq (EX)^2$

Důsledek:  $\text{Var}(X) = EX \cdot (X-1) + EX - (EX)^2$  ↳ konstantní

Pozorování:  $\text{Var}(X) = 0$ , kdy? Pokud  $P(X = EX) = 1$

Pozorování:

$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  ↳ vychází přímo z definice

↳ posun mi rozptyl  
z logiky věci nemůže  
změnit, protože se  
posunou i střední hodnoty.  
Vázanost štatistiky má tuhle.

$$(aX + b) - E(aX + b) = R$$

$$= (aX + b) - (aEX + b)$$

$$= aX - a \cdot EX$$

$$\text{Var}(aX + b) = E(R^2) = a^2 \cdot E((X - EX)^2)$$

Př.:  $X \sim \text{Ber}(p)$

$EX = p$  Podle def:  $\text{Var}(X) = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2$   
 $= p(1-p) \cdot (1-p+p) = p(1-p)$

Podle věty:  $EX^2 = EX = p - p^2$

Př.:  $X \sim \text{Geom}(p)$ :  $EX = \frac{1}{p}$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Př.:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ :  $EX = n \cdot p$ ,  $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$  ↳ proto tyhle jsou n-krát víc

↳  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,  $X_i \sim \text{Ber}(p)$

Pr:  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$   $P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$   $k=0,1,\dots$   $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$

$E X = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot 1 = \lambda$

$E X \cdot (X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2} \lambda^2}{(k-2)!} = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$

$\text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$   $\rightarrow$  vychází z toho variance pro  $\text{Var}(X)$  nutně.

Def: Směrodatná odchylka:  $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Pr:  $X \sim \text{Hypergeo}(N, u, n)$

$X \dots$  # červených z  $n$  vytáčených BEZ OPAK.

$N$  míčků  
 $u$  červených } Celkem

$E X = n \cdot \frac{u}{N}$

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i-tý vytáčený míček je červený} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\text{Var} X = n \cdot \frac{u}{N} \cdot \left(1 - \frac{u}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

$X_1 \sim \text{Bern}\left(\frac{u}{N}\right)$

$\rightarrow$  Máme plnou kvádr a všechny červené

$X_2 \sim \text{Bern}\left(\frac{u}{N}\right)$

$\rightarrow$  Proč? Protože je jistý "těžký" míček a také mají všechny stejnou past.

Nejsou nezávislé

Náhodní vektory

Def:  $X, Y$  disk. náh. vel.

Sdružení prav. fce  $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x \text{ AND } Y=y)$

$(X, Y)$  je náh. vektor, pokud jsou definovány

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ tj. } \{X=x, Y=y\} \in \mathcal{F}$

Př: Lze z  $P_{X,Y}$  určit  $P_X, P_Y$ ? ①

Lze z  $P_X, P_Y$  určit  $P_{X,Y}$ ? ②

		x, y					x', y'				
x \ y	1	2	3	4	Σ	x \ y	1	2	3	4	
1	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4	1	1/4	0	0	0	
2	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4	2	0	1/4	0	0	
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4	3	0	0	1/4	0	
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4	4	0	0	0	1/4	

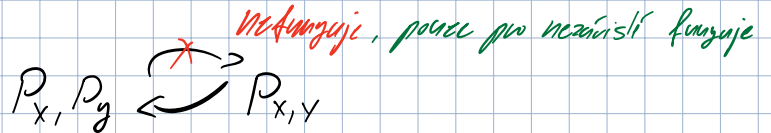
$$P(X=1) = P(X=1, Y \in \{1, 2, 3, 4\}) =$$

$$P(\{(x,y) \in \mathcal{E} \mid (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}) =$$

$$P(x,y=(1,1)) + P(x,y=(1,2)) + \dots$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}$$

Thm:  $P_X(x) = \sum_{y \in H(Y)} P_{X,Y}(x,y)$   
 ⋮  
 stejní pro y



Def: X, Y jsou nezávislé pokud  $\forall x,y \in \mathbb{R}$ : jezd  $\{X=x\}$  a  $\{Y=y\}$  jsou nezávislé.

Př: Hodíme n-krát kostkou. (nezávislé jezd)

V každém kladu má 1 prv.  $p_1 \geq 0$

2 prv.  $p_2 \geq 0$

⋮

$$\sum p_i = 1$$

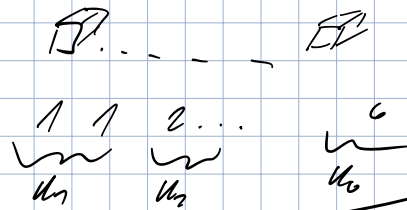
$X_1 - X_6$  d.n.v.

$X_i := \# \text{ kladů, kde padlo } i$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots) = ?$$

$$P_{X_1}(k_1) = \sum_{k_2, \dots, k_6} P_{X_1, \dots, X_6}(k_1, \dots, k_6) =$$

$$X_1 \sim \text{Bin}(n, p_1) \sim \binom{n}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n-k_1}$$



$$\Rightarrow = \frac{n!}{k_1! \dots k_6!} = \binom{n}{k_1, \dots, k_6}$$

↳ nezajímají nás permutace  
 musíme jednat kladů  $k_i$

Thm: Funkce n.v.  $Z = g(X,Y)$

$$P_Z(z) = \sum_{\substack{x,y \in H(X), H(Y) \\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$$

Důsledek: Ukončení vorec:

$$g(x, y) = x + y \text{ ANO } X, Y \text{ jsou nezávislé, pak } P_2(z) = \sum_x P_X(x) P_Y(z-x)$$

$$P_2(4) = P_{X,Y}(1,3) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,1) \quad \rightarrow \text{pokud nezávislé} = P_X(3) \cdot P_Y(1)$$

Thm: PMS

$$Eg(X, Y) = \sum_{\substack{x \in H(x) \\ y \in H(y)}} g(x, y) \cdot P_{X,Y}(x, y)$$