Def: Rozptyl: $var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$

↳ dostanu popis toho, jak je X rozptýlený.

Thm: $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Dk: označme $\mu = \mathbb{E}X$. Pak $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{E}\left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) =$

$= \mathbb{E}x^2 - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2$

$= \mathbb{E}x^2 - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2$

$= \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}X)^2$ $\boxed{\times}$

Důsledek: $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}(X))^2$

Důsledek: $Var(X) = \mathbb{E}X\cdot(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$

Pozorování: $Var(X) = 0$, kdy? Pokud $P(X = \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{konstanta}}) = 1$

Pozorování:

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

↳ posun mi rozptyl z logiky věci nemůže změnit, protože se posune i střední hodnota. Naopak škálování roli hraje.

↳ vychází přímo z definice

$(aX+b) - \mathbb{E}(aX+b) = R$

$= (aX+\cancel{b}) - (a\mathbb{E}(X)+\cancel{b})$

$= aX - a\cdot\mathbb{E}(X)$

$Var(aX-b) = \mathbb{E}(R^2) = a^2\cdot\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right)$

Př.: $X \sim Ber(p)$

$\mathbb{E}(X) = p$ Podle def: $Var(X) = p\cdot(1-p)^2 + (1-p)\cdot(0-p)^2$

$= p(1-p)\cdot(1-p+p) = p(1-p)$

Podle věty: $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X = p - p^2$

Př.: $X \sim Geom(p)$: $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Př.: $X \sim Bin(n,p)$: $\mathbb{E}X = n\cdot p$, $Var(X) = np\cdot(1-p)$ → proto tyhle jsou n-krát víc

↳ $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim Ber(p)$

Př: $X \sim Pois(\lambda)$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1\dots$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$

$$EX = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\cdot 1 = \lambda$$

$$E X\cdot(X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-2}\lambda^2}{(k-2)!} = \lambda^2\cdot 1 = \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

→ vychází z toho vzorce pro Var(X) nahoře.

Def: Směrodatná odchylka: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Př: $X \sim Hypergeo(N,K,n)$

$X \dots$ # červených z n vytažených BEZ OPAK.

N míčků
K červených } Celkem

$EX = n\cdot\frac{K}{N}$ → $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

X_i: 1 i-tý vytažený míček je červený; 0 jinak

$Var X = n\cdot\frac{K}{N}\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}$

$X_1 \sim Bern\left(\frac{K}{N}\right)$ → Mám plnou krabici a všechny červené

$X_2 \sim Bern\left(\frac{K}{N}\right)$ → Proč? Protože je jakoby „táhnu" najednou a tudíž mají všechny stejnou rast.

$\vdots$

Nejsou nezávislé!

Náhodné vektory

Def: X, Y disk. náh. vel.

Sdružená prav. fce $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x \text{ AND } Y=y)$

(X,Y) je náh. vektor, pokud jsou definovány $\forall x,y\in\mathbb{R}$, tj. $\{X=x, Y=y\}\in\mathcal{F}$

Př.: Lze z $P_{X,Y}$ určit P_X, P_Y? ①

Lze z P_X, P_Y určit $P_{X,Y}$? ②

X, Y

$x \backslash y$	1	2	3	4	Σ
1	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
2	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

X', Y'

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	0	1/4	0	0
3	0	0	1/4	0
4	0	0	0	1/4

$$P(X=1) = P(X=1, Y\in\{1,2,3,4\}) =$$
$$P((X,Y)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}) =$$
$$P(X,Y=(1,1)) + P(X,Y=(1,2)) + \dots$$
$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{4}$$

Thm: $P_X(x) = \sum_{y\in H(Y)} P_{X,Y}(x,y)$

⋮

stejné pro y

$$P_X, P_Y \underset{\longleftarrow}{\overset{\times}{\longrightarrow}} P_{X,Y}$$

nefunguje, pouze pro nezávislé funguje

Def: X, Y jsou nezávislé, pokud $\forall x,y \in \mathbb{R}$: jevy $\{X=x\}$ a $\{Y=y\}$ jsou nezávislé.

Př.: Hodíme n-krát kostkou. (nezávislé jevy)

V každém hodu má 1 pnv. $p_1 \geq 0$

2 pnv. $p_2 \geq 0$

⋮

$\sum p_6 = 1$

$X_1 - X_6$ d.n.v.

$X_i :=$ # hodů, kde padlo i

$$P(X_1=k_1, X_2=k_2, \dots) = ?$$

$$\underbrace{1\ \ 1}_{k_1}\ \ \underbrace{2\ \dots}_{k_2}\ \ \underbrace{6}_{k_6}$$

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_6!} = \binom{n}{k_1! \dots k!}$$

<= nezajímají mě permutace uvnitř jednotlivých k_i

$$P_{X_1}(k_1) = \sum_{k_2 \dots k_6} P_{X_1 \dots X_6}(k_1 \dots k_6) =$$

$$X_1 \sim Bin(n, p_1) \sim \binom{n}{k_1} p^{k_1} \cdot (1-p)^{n-k_1}$$

Thm: Funkce n.v. $Z = g(X,Y)$

$$P_Z(z) = \sum_{\substack{x,y \in H(X),H(Y) \\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$$

Důsledek: Konvoluční vzorce:

$g(x,y) = x+y$ AND X,Y jsou nezávislé, pak $P_Z(z) = \sum_x P_X(x) P_Y(z-x)$

Př: $P_Z(4) = P_{X,Y}(1,3) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,1)$ → pokud nezávislé $= P_X(3) \cdot P_Y(1)$

Thm: PNS

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \sum_{\substack{x \in H(X) \\ y \in H(Y)}} g(x,y) \cdot P_{X,Y}(x,y)$$