

Př: $X \sim \text{Bin}(m, p)$

$Y \sim \text{Bin}(n, p)$

X, Y nezávislé, $Z = X + Y$

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$$

//

$$P(X+Y=z) = \sum_{x=0}^m \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} \cdot \binom{n}{z-x} p^{z-x} \cdot (1-p)^{n-(z-x)}$$

$$= p^z \cdot (1-p)^{m+n-z} \sum_{x=0}^z \binom{m}{x} \binom{n}{z-x}$$

$$= p^z \cdot (1-p)^{m+n-z} \cdot \binom{m+n}{z}$$

$Z \sim \text{Bin}(m+n, p)$

diskrétní tedy je

Thm: $E(aX + bY) = aEX + bEY$

\sim veličiny nemusí být nezávislé

Ob:

$g(x, y) = ax + by$

$E_g(X, Y) = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot P_{X,Y}(x,y)$

\hookrightarrow věta lineární statistiky

$$\hookrightarrow = \sum_{x,y} a \cdot x \cdot P_{X,Y}(x,y) + \sum_{x,y} b \cdot y \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

$$= a \cdot \sum_x x \cdot \sum_y P_{X,Y}(x,y)$$

$P_X(x)$ \rightarrow jde přes všechny "y", tedy dostaneme součet pro "x".

\rightarrow stejné pro druhou částku

EX
 $a \cdot EX$

Thm: X, Y nezávislé $\Rightarrow EXY = EX \cdot EY$

$P_X(x) \cdot P_Y(y)$

Ob:

$g(x,y) = xy$

$EX \cdot Y = \sum_{x,y} xy \cdot P_{X,Y}(x,y)$

$= \sum_x x \cdot P_X(x) \cdot \sum_y y \cdot P_Y(y)$

$= EX \cdot EY$

Pozn: Důležité platí, že $E(f(x) \cdot h(y)) = E(f(x)) \cdot E(h(y))$

Def: X, Y náh. veličiny, Kovariance náhodných veličin

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$



$$\text{cov}(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (X - \mathbb{E}X)) = \text{var}(X)$$



$$X, Y \text{ nezáv.} \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$$



$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}$$



$$\text{cov}(X, aY + bZ + c) = a \cdot \text{cov}(X, Y) + b \cdot \text{cov}(X, Z)$$



$$Y = \text{const} \Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$$

Def: Korelace

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

Thm: $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Dů: $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY - \underbrace{(\mathbb{E}X)}_a Y - X \cdot \underbrace{(\mathbb{E}Y)}_b + \underbrace{\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}_c) &= \mathbb{E}(XY) - a\mathbb{E}Y - b\mathbb{E}X + c \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \end{aligned}$$

Thm: $\text{var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j)$, spec. pokud $X_1 - X_n$ nezávislé

$$= \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i)$$

\hookrightarrow pro $i=j$ $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{var}(X_i)$

pro $i \neq j$ $\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \rightarrow$ pro nezávislé!

Def: Podmíněná pmv. fce

$$P_{X|A}(x) = P(X=x|A)$$

n.v. \rightarrow $\omega \in \Omega$ \leftarrow *eR*

$$P_{X|Y}(x,y) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x \& Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_x P_{X,Y}(x,y)}$$

Obecné náhodné veličiny

Def: Náh. vel. na pr. pmv. (Ω, \mathcal{F}, P)

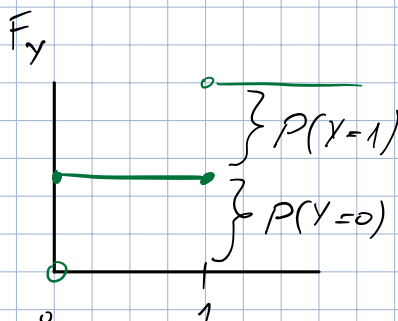
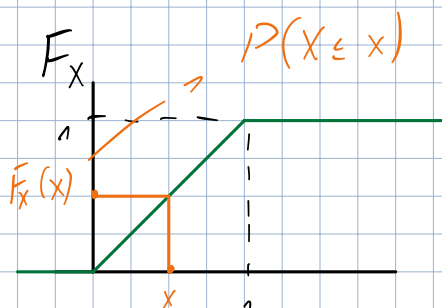
je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.j. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

$$P(X \leq x) =: F_X(x)$$

Funkce F_X se nazývá distribuční fce X .

CDF: cumulative distribution function



$$Y \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Thm: Vlastnosti F_X

1) F_X je neubavující

2) $F_X(-\infty) = 0$

3) $F_X(+\infty) = 1$

4) F_X zprava spojitá: $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} F_X(y)$

Dk: 1) $x < y \Rightarrow F_x(x) \leq F_x(y)$ $P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$
 $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

Def: Spojitá náh. vel. X :

foloví n.v. ži: $\exists f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f.i. $F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$
 \hookrightarrow hustota n. X

Thm: Spoj. náh. vel. X s hust. f_x :

1) $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(t) dt$