Př.: $X \sim Bin(m,p)$

$Y \sim Bin(n,p)$

X, Y nezávislé, $Z = X + Y$

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$$

$$P(X+Y=2) = \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} \cdot \binom{n}{2-x} p^{2-x} \cdot (1-p)^{n-(2-x)}$$

$$= p^2 \cdot (1-p)^{m+n-2} \sum_{x=0}^{n} \binom{m}{x}\binom{n}{2-x}$$

$$= p^2 \cdot (1-p)^{m+n-2} \cdot \binom{m+n}{2}$$

důsledkem tedy je

$2 \sim Bin(m+n, p)$

Thm: $E(aX+bY) = aEX + b \cdot EY$ $\rightsquigarrow$ veličiny nemusí být nezávislé

Dk: $g(x,y) = ax+by$

$$E g(X,Y) = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

$\hookrightarrow$ věta Naiv. statistika

$$= \sum_{x,y} a \cdot x \cdot P_{X,Y}(x,y) + \sum b y \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \underbrace{a \cdot \underbrace{\sum_x x \underbrace{\sum_y P_{X,Y}(x,y)}_{P_X(x)}}_{EX}}_{a \cdot EX}$$

$\to$ jdu přes všechny „y", tedy dostanu samotnou pst „x"

$\to$ Stejně pro druhou půlku

Thm: X, Y nezávislé $\Rightarrow EXY = EX \cdot EY$

Dk: $g(x,y) = xy$

$$EX \cdot Y = \sum_{x,y} xy \cdot \underbrace{P_{XY}(x,y)}_{P_X(x) \cdot P_Y(y)}$$

$$= \sum_x x \cdot P_X(x) \cdot \sum_y y \cdot P_Y(y)$$

$$= EX \cdot EY$$

Pozn: Dokonce platí že $E(f(X) \cdot h(Y)) = E(f(X)) \cdot E(h(Y))$

Def: X, Y náh. veličiny, **Kovariance náhodných veličin**

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)\big)$$

$$\operatorname{cov}(X,X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)\cdot(X-\mathbb{E}X)\big) = \operatorname{var}(X)$$

$$X, Y \text{ nezáv.} \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$$

$$|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}$$

$$\operatorname{cov}(X, aY + bZ + c) = a\cdot\operatorname{cov}(X,Y) + b\cdot\operatorname{cov}(X,Z)$$

$$Y = \text{const} \Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0$$

Def: Korelace

$$\operatorname{cor}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)}}$$

Thm: $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$

Dk:
$$\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)\big)$$

$$\mathbb{E}\big(XY - \underbrace{(\mathbb{E}X)}_{a}Y - X\cdot\underbrace{(\mathbb{E}Y)}_{b} + \underbrace{\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y}_{c}\big) = \mathbb{E}(XY) - a\mathbb{E}Y - b\mathbb{E}X + c$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

Thm: $\operatorname{var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, spec. pokud $X_1 \dots X_n$ nezávislé,

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)$$

$\Leftarrow$ pro $i=j$ $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{var}(X_i)$

pro $i \neq j$ $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$ $\rightarrow$ pro nezávislé!

Def: Podmíněná prav. fce

$$\underset{\text{n.v.}}{P_{X|\underset{\text{jev} \subseteq \Omega}{A}}}(\overset{\in \mathbb{R}}{x}) = P(X = x \mid A)$$

$$P_{X|Y}(x,y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x \;\&\; Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P_{X,Y}(x)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x',y)}$$

Obecné náhodné veličiny

Def: Náh. vel. na pr. pros. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

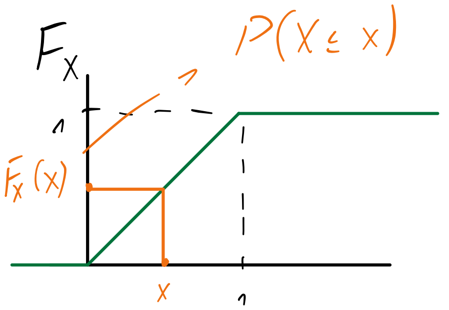
je $X: \Omega \to \mathbb{R}$ t.ž. $\forall x \in \mathbb{R}$

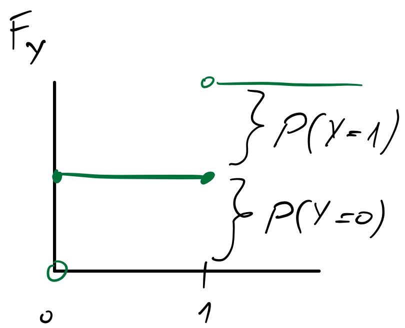
$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

$$P(X \le x) := F_X(x)$$

Funkce F_X se nazývá distribuční fce X.

CDF: cumulative distribution function





$X \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$

Thm: Vlastnosti F_X

1) F_X je neklesající

2) $F_X(-\infty) = 0$

3) $F_X(+\infty) = 1$

4) F_X zprava spojitá: $F_X(x) = \lim_{y \to x^+} F_X(y)$

Ob: 1) $x < y \Rightarrow F_X(x) \le F_X(y)$ $\quad P(X \le x) \le P(X \le y)$

$\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\}$

Def: Spojitá náh. vel. X:

takové n.v. že: $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.ž. $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt$

<- hustota n. X

Thm: Spoj. náh. vel. X s hust. f_X:

1) $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$