

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \ \& \ Y \leq y)$$

$$= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s,t) dt ds$$

\hookrightarrow sdružení hustota $\rightarrow g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Thm: PWS: $E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)$

Thm: \Downarrow $E(X+Y) = EX + EY$

Def. Marginální hustota

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \rightarrow \text{analogicky pro } Y$$

Nzávislost náhodných veličin:

X, Y jsou nez. $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$ jsou $\{X \leq x\}$ & $\{Y \leq y\}$ jsou nez.

tedy $P(X \leq x \ \& \ Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

\hookrightarrow také platí

Thm: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (společná hustota)

Podmíněná hustota

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Uvolňovací vzorec

Společná X, Y n.v.v., $Z = X+Y$, pak $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) dx$

Př: $X, Y \sim N(0,1)$

$$f_X = f_Y = \varphi \quad \rightarrow \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}}_{\varphi(z-x)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} \cdot e^{-\frac{z^2}{4}} dx$$

$$= e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad \text{hustota } N(0,2)$$

Př: Vícerozměrné m.h. rozdělení:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot \dots \cdot \varphi(t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{t_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{t_n^2}{2}}$$

2 = h.v.s. hustota f

$$= (z_1 \dots z_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}, \text{ kde } r = \|(t_1, \dots, t_n)\|$$

Poznámka: $z_1 - z_n \sim N(0,1)$ → platí i pro $n > 2$, jen 2 je ilustrativní:

$$\text{Pohled } Z = (X, Y) \quad f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_z(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(y) dy = \varphi(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \varphi(x) = 1$$

protože to je hustota

Generování: Vygeneruj n n.v. $\sim N(0,1)$, pak z nich udělej vektor.

$\frac{z}{\|z\|}$ je uniformně náhodný jednotkový vektor

Def: Obecné vícerozměrné n.v.

$$f \sim e^{-Q \cdot (x-\mu)}$$

kde μ je n -tice čísel, Q je PSD matice → pozitivně semidefinitní matice kv. fce

Př: ① 99% lidí starší než E ?

- stačí spousta stejně starých a jeden extrém.

② 91% ... $2 \times E$? - pohled věk > 0

- věk

$b=2$

Thm: Markova nerovnost:

$$X \text{ je n.v., } X \geq 0 \Rightarrow \forall a > 0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

$$\text{ch. } P(X \geq b \cdot EX) \leq \frac{1}{b}$$

Dk: 2 $B \geq a$ B_2 0

$$E(X) = P(X \geq a) \cdot E(X|X \geq a) + P(X < a) \cdot E(X|X < a)$$

$$\geq P(X \geq a) \cdot a + P(X < a) \cdot 0$$

Př: Mějme alg., kde data běhn je T , $E T = n^2$

$$P(T \geq cn^2) \leq \frac{1}{c}$$

jak jen jednou za „e“ mi pokleží
dřív je n^2 čas.

Thm: Čebyševova věta

X n.v. $E X + \mu < \infty$, $\text{Var } X = \sigma^2 < \infty$, pak

$$P(|X - \mu| \geq t \cdot \sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

Dk: $Y = (X - \mu)^2 \geq 0$. Markovova nerovnost

$$E Y = \text{Var } X = \sigma^2$$

$$P(|X - \mu| \geq t \cdot \sigma) = P(Y \geq t^2 \cdot \sigma^2) \leq \frac{1}{t^2}$$

$E Y$

Silný zákon velkých čísel

X_1, X_2, \dots n.v.v., stejné rozdělení, $E X = \mu$, $\text{Var } X = \sigma^2$

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

(výběrový průměr)

Thm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$ skoro jistě, tedy

$$P(\text{---} || \text{---}) = 1$$

X_1, X_2, \dots experim. měření, máme \bar{X}_n průměry, jak pokud děláme nekonečně mnoho těchto průměrů, tak oni to konvergují k reálné hodnotě.

$$\int_{\Omega} g(x) \quad X_i = g(\text{náhodný bod } \nu \Omega)$$

→ Monte Carlo integrace

Slabý zákon velkých čísel

(stejná předpoklady jako u velkých čísel)

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

\bar{X}_n konverguje k μ prosti, značíme $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

(tobhle říká slabší tvrzení: „Mozná to bude pro velká čísla platit, ale s malou prosti“).

Dů:

$$E \bar{X}_n = \frac{EX_1 + \dots + EX_n}{n} = \mu \quad \rightarrow \text{je součet n.n.v.}$$

$$\text{Var } \bar{X}_n = \frac{\text{Var } X_1 + \text{Var } X_2 + \dots + \text{Var } X_n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

→ tobhle se tedy blíží k nule.

$$\sigma_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad t = \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad P\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq \underbrace{t \cdot \sigma_{\bar{X}_n}}_{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

→ To má říkat, kolik potřebuji měření, abych věděl, že chyba nebude
větší než $x\%$ případně.