$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \;\&\; Y \le y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds}$$

$\to$ sdružená hustota

Thm: PNS: $\mathbb{E}\big(g(X,Y)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{X,Y}(x,y)$ $\quad \to g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$

Thm: $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Def. Marginální hustota

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$\to$ analogicky pro y

Nezávislost náhodného vektoru:

X,Y jsou nez. $\iff$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ jevy $\{X \le x\}$ & $\{Y \le y\}$ jsou nez.

tedy $P(X \le x \;\&\; Y \le y) = P(X \le x)\cdot P(Y \le y)$

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ $\quad$ takže taky

Thm: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ (pokud mají hustotu)

Podmíněná hustota

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x,y)}$$

Konvoluční vzorec

Pokud X,Y n.n.v., $Z = X+Y$, pak $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$

Př.: $X,Y \sim N(0,1)$

$f_X = f_Y = \varphi \quad \to \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}^{\varphi(x)} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}}^{\varphi(z-x)}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\cdot e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(z/\sqrt{2})^2}{2}}$$

$$= e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

hustota $N(0,2)$

Př.: Vícerozměrné nah. rozdělení:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{t_1^2}{2}}\cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{t_n^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}, \text{ kde } r = \|(t_1, \dots, t_n)\|$$

Z = n.v.s. hustotou f

$= (Z_1 \dots Z_n)$

Pozorování: $Z_1 - Z_n \sim N(0,1)$ → platí i pro >2, jen 2 je ilustrativní.

Pokud $Z = (X, Y)$ $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi(y)\,dy = \varphi(x)\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy}_{=1} = \varphi(x)$

protože to je hustota

Generování: Vygeneruji „n" n.v. $\sim N(0,1)$, pak z nich udělám vektor.

$\frac{Z}{\|Z\|}$ je uniformní náhodný jednotkový vektor

Def.: Obecné vícerozměrné n.v.

$f \sim e^{-Q\cdot(t-\mu)}$, kde μ je n-tice čísel, Q je PSD matice → positivně semidefinitní matice kv. fce

Př.:

① 99% lidí starší než $\mathbb{E}$?

- stačí spousta stejně starých a jeden extrém.

② 51% ... $2\times\mathbb{E}$? - pokud věk > 0

- nelze

$b=2$

Thm: Markovova nerovnost:

X je n.v., $X \geq 0 \Rightarrow \forall a > 0\ P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

ekv. $P(X \geq b\cdot\mathbb{E}X) \leq \frac{1}{b}$

Dk: 2

$$\mathbb{E}(X) = P(X \geq a) \cdot \overset{B}{} \mathbb{E}(X \mid X \geq a) + P(X < a) \cdot \mathbb{E}(X \mid X < a)$$

$$\geq P(X \geq a) \cdot a + P(X < a) \cdot 0$$

Př: Mějme alg., kde doba běhu je T, $\mathbb{E}T = n^2$

$$P(T \geq cn^2) \leq \frac{1}{c}$$

pak jen jednou za „c" mi poběží déle jak n^2 čas.

Thm: Čebyševova věta

X n.v. $\mathbb{E}X = \mu < \infty$, $\operatorname{Var} X = \sigma^2 < \infty$, pak

$$P(|X-\mu| \geq t \cdot \sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

Markovova nerovnost

Dk: $Y = (X-\mu)^2 \geq 0$. $\qquad \mathbb{E}Y = \operatorname{var} X = \sigma^2$

$$P(|X-\mu| \geq t \cdot \sigma) = P(Y \geq t^2 \cdot \underbrace{\sigma^2}_{\mathbb{E}Y}) \leq \frac{1}{t^2}$$

Silný zákon velkých čísel

$X_1, X_2, \ldots$ n.n.v., stejné rozdělení, $\mathbb{E}X = \mu$, $\operatorname{var} X = \sigma^2$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{(výběrový průměr)}$$

Thm: $\lim_{n \to \infty} \overline{X}_n = \mu$ skoro jistě, tedy

$$P(\text{— " —}) = 1$$

$X_1, X_2 \ldots$ experim. měření, mám $\overline{X}_n$ průměry, pak pokud dělám nekonečně mnoho těchto průměrů tak mi to konverguje k reálné hodnotě.

$$\int_\Omega g(x) \qquad X_i = g(\text{náhodný bod } v\ \Omega)$$

$\longrightarrow$ Monte Carlo integrování

Slabý zákon velkých čísel

(stejné předpoklady jako u velkých)

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

$\bar{X}_n$ konvergují k μ pstí, značíme $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

(tohle říká slabší tvrzení: „Možná to bude pro velká čísla platit, ale s malou pstí").

Dk:

$$\mathbb{E}\bar{X}_n = \frac{\mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n}{n} = \mu$$

$$\operatorname{var} \bar{X}_n = \frac{\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + \dots + \operatorname{var} X_n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

-> jsou n.n.v.

$$\sigma_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad t = \sqrt{n}\,\frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad P\Big((\bar{X}_n - \mu) \geq \underbrace{t \cdot \sigma_{\bar{X}}}_{\varepsilon}\Big) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

tohle se tedy blíží k nule.

<-> To mi říká, kolik potřebuji měření, abych věděl, že chyba nastane jen v x % případů.