

$$E(\bar{X}_n) = (E(X_1) + \dots + E(X_n)) / n = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = (\text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)) / n^2 = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Čebyševova nerovnost: $P(|X - \mu| \geq k) = \frac{\text{Var}(X)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot n}$

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Pravidlo minimálního statistika:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in I_m(X)} g(x) \cdot P(X=x)$$

Oh: Necht' $Y = g(X)$: $E(Y) = \sum_{y \in I_m(Y)} y \cdot P(Y=y)$,

kte $y = g(x)$ a $P(Y=y) = \sum_{x \in I_m(X), g(x)=y} P(X=x)$

Nyní jen dosadím do vzorce...

| | |
|---------------|-----|
| 3 · 0,8 = 2,4 | 0,8 |
| 0,2 | 0,2 |
| 0,4 | 0,6 |
| 3,0 | 1,6 |

250 dní jezdim náčerno.

$p = 0,02$, že mě chytne

X počet setkání s revizorem

→ Jde o $\text{Bin}(250, 0,02)$

a) $E(X)$? → $E(X) = 5$

b) $P(X=5)$? $P_X(5) = \binom{250}{5} \cdot 0,02^5 \cdot (0,98)^{245}$

Pois (λ) je lim. ($n, \lambda/n$) $\lambda/250 = 0,02$

$$\lambda = 5$$

Pois (5)

c) Při každé úhradě máme $1/3$ šanci, že se rad máme slítni.

Y = Počet dní, kdy zaplatíme pokutu. Uvězte $E(Y)$ a $Var(Y)$

$P(\text{Budu platit})$

Skrzení dist. fce:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x \wedge Y(\omega) \leq y\})$$

$$F(1,1) - F(0,1) - F(1,0) + F(0,0) =$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ & & -0,2 \end{matrix}}$$

Tabulka musí mít nezápornou hodnotu, takže to musí být alespoň 0,2

Droptky! je nwan 0, pokud $E(X) = X$, tedy jde o konst. veličinu

$$E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax + by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

$$a \cdot \sum_x x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_y y \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_x ax \cdot P(X=x) + \sum_y by \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_{x,y} ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + \sum_{x,y} by \cdot P(Y=y \wedge X=x)$$

$X \leq Y$ show jistě: $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow$ Pak vždy $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

Mějme jedy $A, B, C \in \mathcal{F}$ Jedy jsou nezávislé, pak $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$\forall t \in \mathbb{R}: F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq Y$ show jistě

V každém hodě: $P(X=1) = 1/6$, zisk = 1

V prvním kole: $E(X) = (1 + \dots + 6)/n$

V druhém kole: $E(X) = [(1 + \dots + 6)/n] \cdot 5/6$

V třetím kole: $E(X) = [(1 + \dots + 6)/n] \cdot (5/6)^2$

- vždy bych mohl E (jednoho hodu)
= 3,5

Jenže abych se dostal
do dalšího hodu, musel
jsem v předchozím nehodit 1,
tedy s probí 5/6. (jedy jsou nezávislé.)

V n ém hodu můžu tedy $E(X_n) = 3,5 \cdot (5/6)^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3,5 \cdot (5/6)^{n-1} = 0$$

V každém hodu můžu hodit ≤ 6 . Tudíž $E(X)$ izolaturního hodu = 3,5

Tedy dostanu-li $X \geq 4$, chej rozhodně ukončit hru.

$$P(X=2 | Y=1) = P(X=2, Y=1) / P(Y=1) = 2/18 / 1/3 = \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1 | X=2) = P(Y=1, X=2) / P(X=2) = 2/18 / 1/3 = \frac{2}{18} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = 1/3 = P(Y=1)$$

$$P(X=2, Y=1) = 2/18 \neq 1/3 \cdot 1/3$$

$$P(X=2) = 1/3 = P(Y=2)$$

$$E(X) = E(Y) = 2$$

$$P(X=3) = 1/3 = P(Y=3)$$

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{2}{18} + 3 \cdot \frac{3}{18} + 2 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{1}{18} + 6 \cdot \frac{2}{18} + 3 \cdot \frac{2}{18} + 6 \cdot \frac{3}{18} + 9 \cdot \frac{1}{18}$$

$$= 14 \cdot \frac{1}{18} + 11 \cdot \frac{2}{18} + 11 \cdot \frac{3}{18}$$

$$= \frac{14}{18} + \frac{22}{18} + \frac{33}{18} = \frac{69}{18} = \frac{23}{6}$$

$$X_i \sim \text{Pois}(\gamma), m_n(\gamma) = \gamma, \widehat{m_n(\gamma)} = \bar{X}_n \text{ tedy } \lambda = \frac{38}{40}$$

Lucinka a jeho děti:

$$\text{Bude mít syny s prav. } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

$$\text{Celkový počet dětí } \leadsto \text{to se řídí Geom}(1/2) \quad \text{---} \text{ "na každou ženu přichází 2 děti"}$$

$$\text{A jelikož } E(S+D) \Rightarrow E(S) + E(D) = 2 \Rightarrow E(D) = 1$$

$X, Y \sim U(0,1)$ n.n.v

$$A = \min(X, Y), B = \max(X, Y)$$

$$\text{a) } F_B(b) = ? \quad \text{Protože } U(0,1), \text{ tak } b < 0 \Rightarrow F_B(b) = 0, b > 1 \Rightarrow F_B(b) = 1$$

$$\text{pro } b \in (0,1) \quad F_B(b) = P(B \leq b) = P(X \leq b \wedge Y \leq b) = P(X \leq b) \cdot P(Y \leq b) = b^2$$

(n.n.v.)

$$\text{b) } f_B(b) = F_B(b)' = \underline{\underline{2b}}$$

$$\text{c) } E(B) = \int_0^1 b \cdot 2b \, db = 2 \int_0^1 b^2 \, db = \left[\frac{2}{3} b^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

d) Určete $E(X), E(Y), E(A)$

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{2} \rightarrow E(X+Y) = 1$$

$$X+Y = A+B, \text{ tím pádem } E(A+B) = 1, \text{ tedy } E(A) = \frac{1}{3}$$

$$\text{cov}(A, B) = E(A \cdot B) - E(A) \cdot E(B)$$

$$\hookrightarrow A \cdot B = X \cdot Y \Rightarrow E(A \cdot B) = E(X \cdot Y), X, Y \text{ n.n.v.} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{4}$$

$$\text{cov}(A, B) = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}$$

Sdružená hustota: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$, kde $F_{X,Y}$ je sdružená distr. fce spoj. n.v. X a Y .

Jelý $A_i, i \in I$ jsou nezáv.: $P(\cap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$

Nějme $A_i = \{q_i\}$ pro $i=1, 2, 3$ a $\Omega = \{q_1, q_2, q_3\}$

Pak $P(A_i) = 1/2$, nicméně $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8$

$$P(Y \leq 100) = 1$$

$$P(X = 101) \neq 0$$

$$E(X) = 1/10 \quad E(Y) = 10 \quad E(X - Y) = E(X) - E(Y) < 0,$$

ne $Y \geq 0$, tudíž X může $< Y$

$$X \sim N(0, 1), \quad Y = |X|$$

$$F_Y(y) = ? \quad F_X(x) = P(X \leq x) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$$

$$= P(-y \leq X \leq y) \rightarrow \text{to lze zapísat jako } P(Y \leq y) - P(Y \leq -y)$$

$$\text{Pro } y < 0 = 0$$

$$= F_Y(y) - F_Y(-y)$$

$$\text{Pro } y > 0 : F_Y(y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$$

$$\text{Díky symetrii } F_Y(y) + F_Y(-y) = 1$$

$$= 2\Phi(y) - 1$$

$$\Phi \text{ je prim k } u, \text{ tedy } f_Y = 2u = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y \cdot 2u(y) dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2/2} \cdot y dy =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int e^u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot (-e^{-y^2/2})$$

$$\text{Medián: } F_Y^{-1}(1/2) \rightarrow 2\Phi(y) - 1 = 1/2 \rightarrow y =$$

$$\Phi(y) = 3/4 \rightarrow y = \Phi^{-1}(3/4)$$

$$P(X=6) = p$$

$$P(X \neq 6) = (1-p)/5 = \frac{1}{5} - \frac{p}{5}$$

$$E(X) = 6 \cdot p + (1+2+3+4+5) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{p}{5}\right)$$

$$= 6p + 3 - 3p = 3p + 3$$

$$p = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} + \frac{0}{2} = \frac{7}{2}$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} =$$

4,5

Najděte odhad \hat{p} momentovou metodou. $\bar{X}_n = 3 + 3p$

$$2,6,3 = 11/3$$

$$11/3 = 3 + 3p$$

$$2/3 = 3p$$

$$2/9 = p$$

1, 2, ..., 100, vytahují 3 bez vrácení

$$P(A_1) = \frac{40}{100}, P(A_2) = \frac{39}{99}, P(A_3) = \frac{38}{98}$$

$$\text{Pravděpodobnost} = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} \cdot \frac{38}{98}$$

$$E(\text{součet tří čísel}) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$E(X_i) = (100+1)/2 \quad E(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{303}{2}$$

\hookrightarrow uniformně náhodný výběr

$E(\# \text{ počet míčů} \leq 40) \rightsquigarrow$ jde o hypergeom. rozdělení:

$$E(X) = n \cdot \frac{k}{N} = 3 \cdot \frac{4}{100} = \frac{12}{100}$$

Doba trvání zhouby $\sim \text{Exp}(\frac{1}{20})$

$$X: 10:00$$

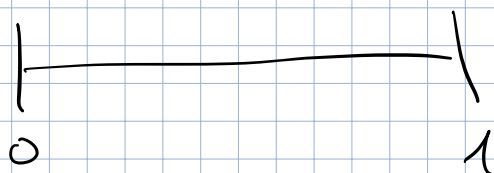
$$Y: 10:20$$

$S :=$ čas, kdy bude dlouhý student dozkoušený

$$\text{Něchť: } P(X \leq 20) = 1 - e^{-1} \rightarrow S = 20 + Y, \text{ díky linearity } E(S | X \leq 20) = 20 + E(Y) = 40$$

$$\text{Čelní: } P(X > 20) = e^{-1} \quad E(S | X > 20) = 20 + E(X | X > 20) + E(Y)$$

$$P(X < Y) = \left| \{ \omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega) \} \right| / |\Omega|$$



⇒) A B A B A B ... P(6 prvních Adamovi)

$$\frac{25}{36} \cdot 1 - \frac{25}{36} = \frac{9}{36} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad x \in (1, \infty), \alpha > 1$$

$$1 = \int_1^{\infty} \alpha \cdot x^{-\alpha-1} dx = \alpha \cdot \int_1^{\infty} x^{-\alpha-1} dx = \left. \begin{matrix} u = -\alpha-1 \\ du = -1 dx \end{matrix} \right| = \alpha \cdot \int_1^{\infty} -x^u du = -\alpha \cdot \left[\frac{x^{u+1}}{u+1} \right]_1^{\infty} = \left[-\alpha \cdot \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_1^{\infty} = 0 - 1 = -1 \quad \rightarrow \text{zde jsem dost pravidelně udělal chybu.}$$

$$L(5, 3, 2, \alpha) = \frac{\alpha}{5^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha}{3^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} (\log \alpha - (\alpha+1) \log 5) + (\log \alpha - (\alpha+1) \log 3) + (\log \alpha - (\alpha+1) \log 2)$$

$$3 \log \alpha - (\alpha+1) \cdot (\log 5 + \log 3 + \log 2)$$

$$3 \cdot \log \alpha - (\alpha+1) \cdot \log(5 \cdot 3 \cdot 2)$$

derivate

$$\frac{3}{\alpha} - \log(30) \quad \frac{3}{\alpha} = \log 30 \rightarrow 3 = \log 30 \cdot \alpha \quad \alpha = \frac{3}{\log 30}$$

$X_1 \rightarrow$ první prvek 1 prvný po sobě

\hookrightarrow geometrické rozdělení $\rightarrow E(X) = \frac{1}{1/2} = 2$

Necht'