$$E(\bar{X}_n) = (E(X_1) + \dots + E(X_n))/n = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = (Var(X_1) + \dots + Var(X_n))/n^2 = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Čebyševova nerovnost: $P(|X-\mu| \geq k) = \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot n}$

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Pravidlo mnivního statistika:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in Im(X)} g(x) \cdot P(X=x)$$

Dk: Nechť $Y = g(X)$: $E(Y) = \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot P(Y=y)$,

kde $y = g(x)$ a $P(Y=y) = \sum_{x \in Im(X), g(x)=y} P(X=x)$

Nyní jen dosadím do vzorce...

$3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$	$0{,}8$
$0{,}2$	$0{,}2$
$0{,}4$	$0{,}6$
$3{,}0$	$1{,}6$

250 dní jezdím načerno.
$p = 0{,}02$, že mě chytne
X počet setkání s revizorem

$\longrightarrow$ Jde o $Bin(250, 0{,}02)$

a) $E(X)$? $\longrightarrow E(X) = 5$

b) $P(X=5)$? $p_X(5) = \binom{250}{5} \cdot 0{,}02^5 \cdot (0{,}98)^{245}$

$Pois(\lambda)$ je lim. $(n, \lambda/n)$ $\qquad \lambda/250 = 0{,}02$

$\lambda = 5$

$Pois(5)$

c) Při každé kontrole máme 1/3 šanci, že se nad námi slitují.
Y = Počet dní, kdy zaplatíme pokutu. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $Var(Y)$

P (Budu platit)

Sdružená dist. fce:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left(\{w \in \Omega : X(w) \leq x \wedge Y(w) \leq y\}\right)$$

$$\underbrace{\underset{0,6}{F(1,1)} - \underset{0,4}{F(0,1)} - \underset{0,4}{F(1,0)}}_{-0,2} + F(0,0) =$$

Tohle musí mít nezápornou hodnotu, tudíž to musí být alespoň 0,2

Rozptyl je roven 0, protože $\mathbb{E}(X) = X$, tedy jde o konst. veličinu

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax+by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$a \cdot \sum_x x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_y y \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_x ax \cdot P(X=x) + \sum_y by \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_{x,y} ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + \sum_{x,y} b \cdot y \cdot P(Y=y \wedge X=x)$$

$X \subseteq Y$ skoro jistě: $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow$ Pak vždy $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

Mějme jevy $A, B, C \in \mathcal{F}$. Jevy jsou nezávislé, pokud $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$\forall t \in \mathbb{R}: F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq Y$ skoro jistě

V každém kroku: $P(X=1) = 1/6$, zisk $= 1$

V prvním hodu: $E(X) = (1+ \dots + 6)/n$

V druhém hodu: $E(X) = [(1+ \dots + 6)/n] \cdot 5/6$

V třetím hodu: $E(X) = [(1+ \dots + 6)/n] \cdot (5/6)^2$

– vždycky mám E(jednoho hodu) $= 3{,}5$. Jenže abych se dostal do dalšího hodu, musel jsem v předchozím nehodit 1, tedy s pstí $5/6$. (jevy jsou nezáv.)

V n-tém hodu mám tedy $E(X_n) = 3{,}5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$\lim_{n \to \infty} 3{,}5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

V každém hodu můžu hodit 1–6. Tudíž $E(X)$ izolovaného hodu $= 3{,}5$

Tedy dostanu-li $X \geq 4$, chci rozhodně ukončit hru.

$$P(X=2 \mid Y=1) = P(X=2, Y=1) / P(Y=1) = 3/18 \,/\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{18} \cdot \tfrac{3}{1} = \tfrac{9}{18} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(Y=1 \mid X=2) = P(Y=1, X=2) / P(X=2) = 3/18 \,/\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{18} \cdot \tfrac{3}{1} = \tfrac{9}{18} = \tfrac{1}{2}$$

$P(X=1) = 1/3 = P(Y=1)$

$P(X=2) = 1/3 = P(Y=2)$

$P(X=3) = 1/3 = P(Y=3)$

$P(X=2, Y=1) = 2/18 \neq 1/3 \cdot 1/3$

$E(X) = E(Y) = 2$

$$E(X \cdot Y) = \tfrac{1}{18} + 2 \cdot 2/18 + 3 \cdot 3/18 + 2 \cdot 3/18 + 4 \cdot 1/18 + 6 \cdot 2/18 + 3 \cdot 2/18 + 6 \cdot 3/18 + 9 \cdot 1/18$$

$$= 14 \cdot 1/18 + 11 \cdot 2/18 + 11 \cdot 3/18$$

$$= 14/18 + 22/18 + \tfrac{33}{18} = \tfrac{64}{18} = \tfrac{32}{9}$$

$X_i \sim Pois(\gamma)$, $m_1(\gamma) = \gamma$, $\widehat{m_1(\gamma)} = \bar{X}_n$ tedy $\lambda = \frac{38}{40}$

Ludvík a jeho děti:

Bude mít syna s pravd. $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$

Celkový počet dětí $\rightsquigarrow$ to se řídí $Geom(1/2)$ $= 2$ → „no libovolný počet to vyjde"

A jelikož $E(S+D) \Rightarrow E(S) + E(D) = 2 \Rightarrow E(D) = 1$

$X, Y \sim U(0,1)$ n.n.v

$A = \min(X,Y)$, $B = \max(X,Y)$

a) $F_B(b) = ?$ Protože $U(0,1)$, tak $b < 0 \Rightarrow F_B(b) = 0$, $b > 1 \Rightarrow F_B(b) = 1$

pro $b \in \langle 0,1 \rangle$ $F_B(b) = P(B \le b) = P(X \le b \wedge Y \le b) \underset{\text{n.n.v.}}{=} P(X \le b) \cdot P(Y \le b) = b^2$

b) $f_B(b) = F_B(b)' = \underline{\underline{2b}}$

c) $E(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot 2b \, db = 2\int_0^1 b^2 db = \left[\frac{2}{3}b^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

d) Určete $E(X)$, $E(Y)$, $E(A)$

$E(X) = E(Y) = 1/2 \;\to\; E(X+Y) = 1$

$X + Y = A + B$, tím pádem i $E(A+B) = 1$, tedy $E(A) = 1/3$

$cov(A,B) = E(A \cdot B) - E(A) \cdot E(B)$

$\hookrightarrow A \cdot B = X \cdot Y \Rightarrow E(AB) = E(XY)$, X, Y n.n.v. $\Rightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{4}$

$cov(A,B) = 1/4 - 2/9 = \underline{\underline{1/36}}$

Sdružená hustota: $f_{X,Y}(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y) / \partial x \partial y$, kde $F_{X,Y}$ je sdruž. distr. fce spoj. n.v. X a Y.

Jevy A_i, $i \in I$ jsou nezáv.: $P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$

Mějme $A_i = \{0, i\}$ pro $i = 1 \dots 3$ v $\Omega = \{0,1,2,3\}$

Pak $P(A_i) = 1/2$, nicméně $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8$

$P(Y \leq 100) = 1$

$P(X = 101) \neq 0$

$\mathbb{E}(X) = 1/10 \quad \mathbb{E}(Y) = 10 \qquad E(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) < 0,$

ale $Y \geq 0$, tudíž X může $< Y$

$X \sim N(0,1), \; Y = |X|$

$F_Y(y) = ? \qquad F_X(x) = P(X \leq x) \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$

$= P(-y \leq X \leq y) \longrightarrow$ to lze rozepsat jako $P(Y \leq y) - P(Y \leq -y)$

Pro $y < 0 \quad = 0 \qquad\qquad = F_Y(y) - F_Y(-y)$

Pro $y > 0$: $F_Y(y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$ Díky symetrii $F_Y(y) + F_X(-y) = 1$

$= 2\Phi(y) - 1$

Φ je prim k φ, tedy $f_Y = 2\varphi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2}$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} y \cdot 2\varphi(y)\,dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{-y^2/2} \cdot y\,dy =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int e^u\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(-e^{-y^2/2}\right)$$

Medián : $F_Y^{-1}(1/2) \to 2\Phi(y) - 1 = 1/2 \to y =$

$\Phi(y) = 3/4 \to y = \Phi^{-1}(3/4)$

$15 \cdot \frac{1}{5} - \frac{p}{5}$

$P(X = 6) = p$

$P(X \neq 6) = (1-p)/5 = \frac{1}{5} - \frac{p}{5}$

$\mathbb{E}(X) = 6 \cdot p + (1+2+3+4+5) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{p}{5}\right)$

$= 6p + 3 - 3p = 3p + 3$

$p = \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2}$

$4{,}5$

$6 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} =$

Najděte odhad $\hat{p}$ momentovou metodou. $\bar{X}_n = 3+3p$ $\quad 11/3 = 3+3p$

$2, 6, 3 = 11/3$ $\quad 2/3 = 3p$

$2/9 = p$

$1, 2, \dots, 100$, vytahuji 3 bez vracení

$P(A_1) = \frac{40}{100}$, $P(A_2) = \frac{39}{99}$, $P(A_3) = \frac{38}{98}$

Pravděpodobnost $= \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} \cdot \frac{38}{98}$

$\mathbb{E}$(součtu tří čísel) $= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)$

$\mathbb{E}(X_i) = (100+1)/2$ $\qquad \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) = 303/2$

$\leftrightarrow$ uniformně náhodný výběr

$\mathbb{E}$(# počet míčků ≤ 40) $\rightsquigarrow$ jde o hypergeom. rozdělení:

$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{K}{N} = 3 \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$

Doba trvání zkoušky $\sim Exp(\frac{1}{10})$

X : 10:00

Y : 10:20

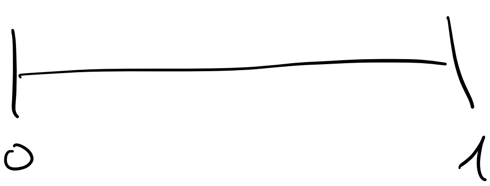
$S :=$ čas, kdy bude druhý student dozkoušený

Nečeká: $P(X \leq 20) = 1 - e^{-1} \rightarrow S = 20 + Y$, díky linearitě $\mathbb{E}(S | X \leq 20) = 20 + \mathbb{E}(Y)$

$= 40$

Čeká: $P(X > 20) = e^{-1}$ $\quad \mathbb{E}(S | X > 20) = 20 + \mathbb{E}(X | X > 20) + \mathbb{E}(Y)$

$P(X < Y) \Rightarrow |\{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}| / |\Omega|$



$\frac{25}{36}$ $1-\frac{25}{36}=\frac{9}{36}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

ABABAB... P(6 padne první Adamovi)

$$\left(\frac{5}{6}\right)^0 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6} \cdot \sum_i^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i}$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad x \in \langle 1, \infty), \alpha > 1$$

$$1 = \int_1^{\infty} \alpha \cdot x^{-\alpha-1} dx = \alpha \cdot \int_1^{\infty} x^{-\alpha-1} dx = \left| \begin{matrix} u = -\alpha-1 \\ du = -1 dx \end{matrix} \right| = \alpha \cdot \int_1^{\infty} -x^u du = -\alpha \cdot \left[\frac{x^{u+1}}{u+1} \right]_1^{\infty} =$$

$$\left[-\alpha \cdot \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_1^{\infty} = 0 - 1 = -1$$ --> zde jsem dost pravděpodobně udělal chybu.

$$L(5,3,2,\alpha) = \frac{\alpha}{5^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha}{3^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} \quad (\log \alpha - (\alpha+1) \log 5) + (\log \alpha - (\alpha+1) \log 3) + (\log \alpha - (\alpha+1) \log 2)$$

$$3 \log \alpha - (\alpha+1) \cdot (\log 5 + \log 3 + \log 2)$$

$$3 \cdot \log \alpha - (\alpha+1) \cdot \log(5 \cdot 3 \cdot 2)$$

derivace

$$\frac{3}{\alpha} - \log(30) \qquad \frac{3}{\alpha} = \log 30 \to 3 = \log 30 \cdot \alpha \qquad \alpha = \frac{3}{\log 30}$$

X_1 --> poprvé padly 1 panny po sobě

↳ geometrické rozdělení --> $E(X) = \frac{1}{1/2} = 2$

Nechť