Datové struktury I

3. přednáška: (a,b)-stromy

Jirka Fink

https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Zimní semestr 2024/25

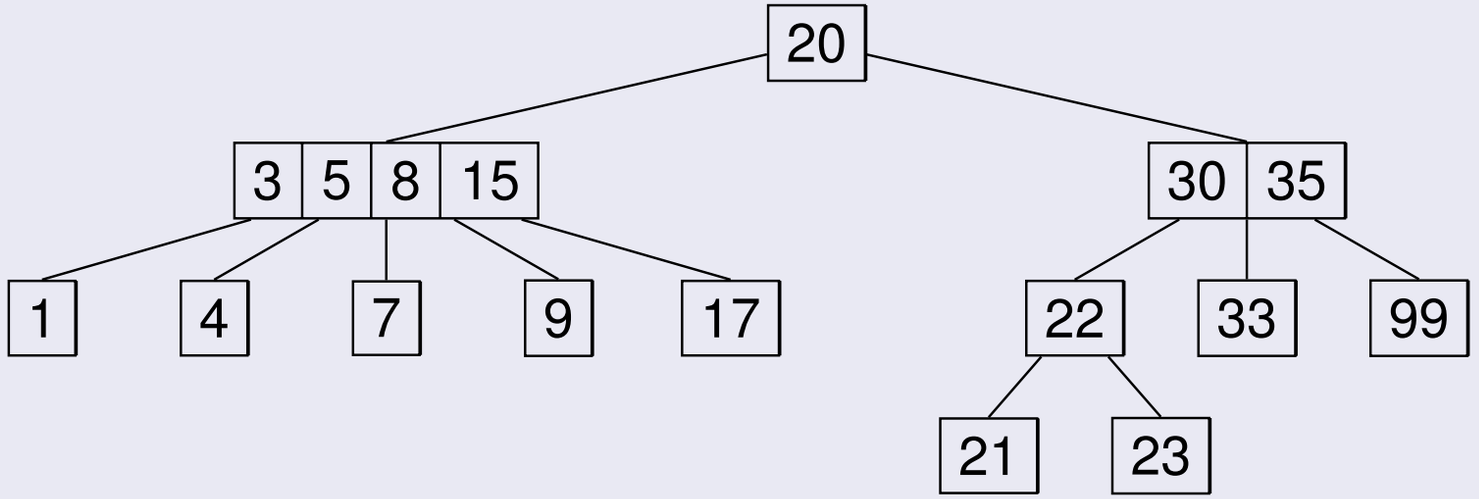
Vyhledávací strom

Nejčastěji používáno u DB, protože to funguje dobře se sekvenčním čtením

Popis

- Vnitřní vrcholy mají libovolný počet synů (typicky alespoň dva)
- Vnitřní vrchol s k syny má $k - 1$ setříděných klíčů
- V každém vnitřním vrcholu je i-tý klíč větší než všechny klíče v i-tém podstromu a menší než všechny klíče v $(i + 1)$ podstromu pro všechny klíče i
- Prvky mohou být uloženy pouze v listech nebo též ve vnitřních vrcholech (u každého klíče je uložena i hodnota)
- Pokud máme hodnoty jen v listech, pak i-tý klíč vrcholu může být roven největšímu klíči v i-tém podstromu

Příklad: Hodnoty jsou ve všech vrcholech



(a,b)-strom (Bayer, McCreight, 1972)

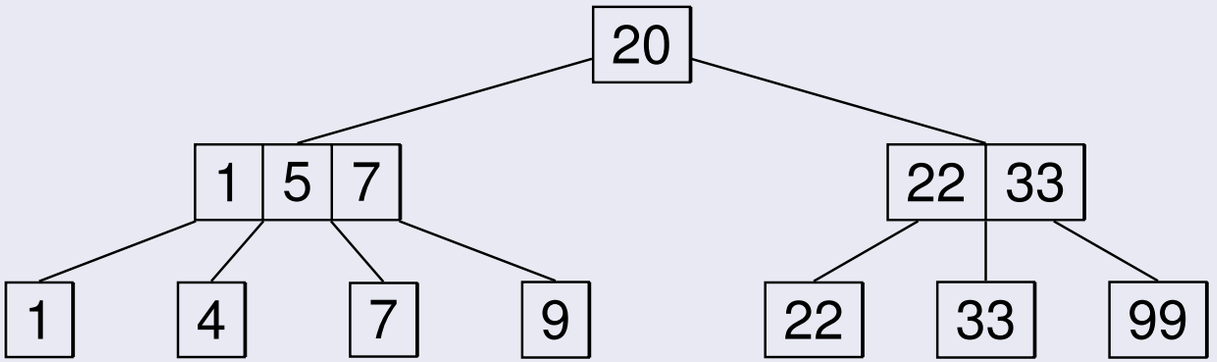
Definice

a, b jsou celá čísla splňující $a \geq 2$ a $b \geq 2a - 1$

- (a,b)-strom je vyhledávací strom
- Všechny vnitřní vrcholy kromě kořene mají alespoň a synů a nejvýše b synů
- Kořen má nejvýše b synů
- Všechny listy jsou ve stejné výšce

Pro zjednodušení uvažujeme, že prvky jsou jen v listech①

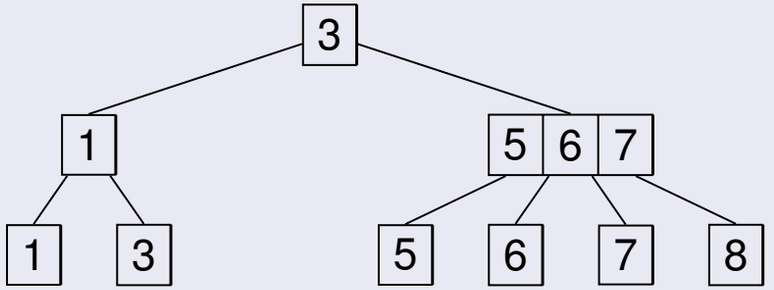
Příklad: (2,4)-strom



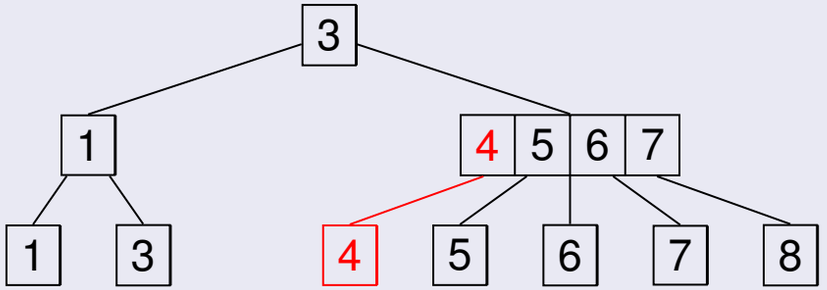
1. V domácím úkolu jsou prvky i ve vnitřních vrcholech, tak si rozmyslete, jak se změní operace Insert a Delete.

(a,b)-strom: Operace Insert

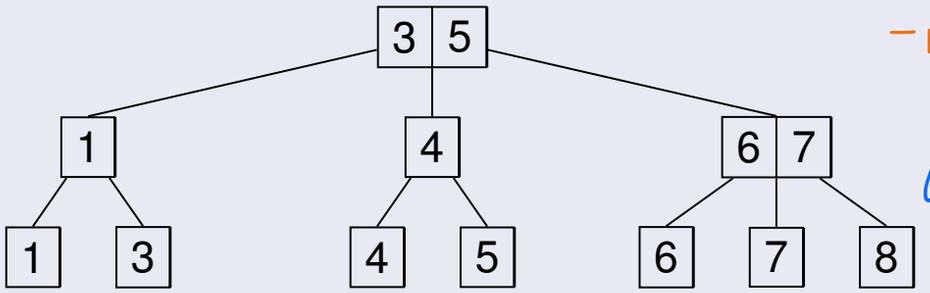
Vložte prvek s klíčem 4 do následujícího (2,4)-stromu



Nejprve najdeme správného otce, jemuž přidáme nový list



Opakovaně rozdělujeme vrchol na dva



- můžeme se kaskádovitě štěpit až do kořene
  - když roštěpím kořen, musím mít zaručeno mít jen 2 potomky

ostatní musí mít alespoň a synů

(a,b)-strom: Operace Insert

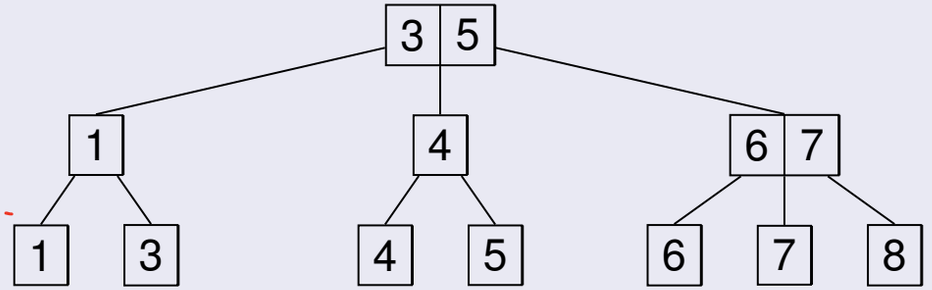
Algoritmus

1 Najít otce v, kterému nový prvek patří
2 Přidat nový list do v
3 **while** $\deg(v) > b$ **do**
  `# Najdeme otce` u `vrcholu` v
4 **if** *v je kořen* **then**
5 Vytvořit nový kořen u s jediným synem v
6 **else**
7 $u \leftarrow$ otec v
  `# Rozdělíme vrchol` v `na` v `a` v'
8 Vytvořit nového syna v' otci u a umístit jej vpravo vedle v
9 Přesunout nejpravějších $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ synů vrcholu v do v'
10 Přesunout nejpravějších $\lfloor (b+1)/2 \rfloor - 1$ klíčů vrcholu v do v'
11 Přesunout poslední klíč vrcholu v do u
12 $v \leftarrow u$

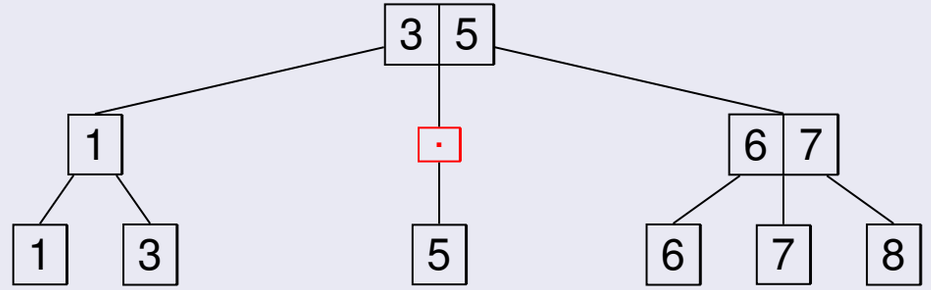
Musíme ještě dokázat, že po provedení všech operací doopravdy dostaneme (a,b)-strom. Ověříme, že rozdělené vrcholy mají alespoň a synů (ostatní požadavky jsou triviální). Rozdělovaný vrchol má na počátku právě $b+1$ synů a počet synů po rozdělení je $\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor$ a $\lceil \frac{b+1}{2} \rceil$. Protože $b \geq 2a-1$, počet synů po rozdělení je alespoň $\lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{2a-1+1}{2} \rfloor = \lfloor a \rfloor = a$.

(a,b)-strom: Operace Delete

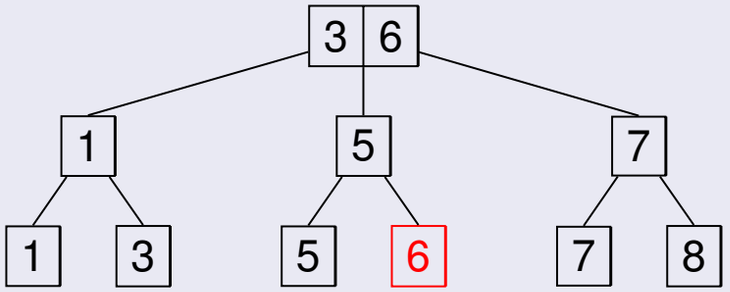
Smažte prvek s klíčem 4 z následujícího (2,4)-stromu



Nalezneme a smažeme list

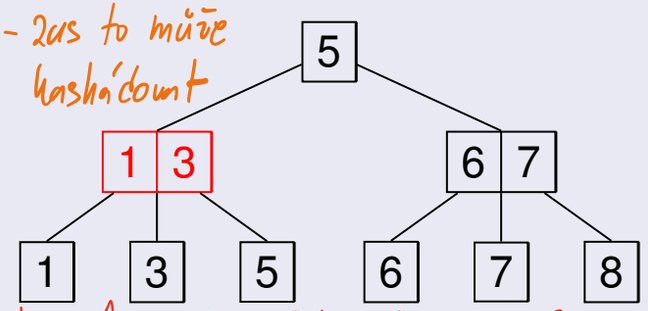


Přesuneme jedno syna od bratra nebo spojíme vrchol s bratrem



můžu si vybrat prvek z obou nejbližších synů pokud nemůžu bratrům brát, můžu vrcholy sloučit

- zas to může kaskádovat



→ budu mít $2n-1$ vrcholů, takže v limitě

(a,b)-strom: Operace Delete

Algoritmus

```
1  Najít list l obsahující prvek s daným klíčem
2  v ← otec l
3  Smazat l
4  while deg(v) < a & v není kořen do
5      u ← sousední bratr v
6      if deg(u) > a then
7          Přesunout správného syna u pod v ①
8      else
9          Přesunout všechny syny u pod v ②
10         Smazat u
11         if v nemá žádného bratra then
12             Smazat kořen (otec v) a nastavit v jako kořen
13         else
14             v ← otec v
```

1. Při přesunu je nutné upravit klíče ve vrcholech u, v a jejich otci.
2. Vrchol u měl a, vrchol v měl $a - 1$ synů. Po jejich sjednocení máme vrchol s $2a - 1 \leq b$ syny.

(a,b)-strom: Analýza

Cíl

- Chceme najít nejlepší hodnoty a, b minimalizující složitost
- Složitost budeme počítat v závislosti na a, b a počtu prvků n

Výška

- (a,b)-strom výšky d má alespoň a^{d-1} a nejvýše b^d listů.
- Výška (a,b)-stromu splňuje $\log_b n \leq d \leq 1 + \log_a n$.

Operace FIND

- Nalezení správného syna ve vrcholu: $\mathcal{O}(\log b)$ ①
- Celá operace: $\mathcal{O}(\log b \cdot \log_a n) = \mathcal{O}\left(\log n \frac{\log b}{\log a}\right) = \mathcal{O}(\log n)$ pokud $b = \text{poly}(a)$

Operace INSERT a DELETE

- Rozdělení nebo sloučení vrcholů: $\mathcal{O}(b)$
- Celá operace: $\mathcal{O}(b \cdot \log_a n) = \mathcal{O}\left(\log n \frac{b}{\log a}\right)$
- Optimální volba $a = 2$, $b = 3$

1. Teoreticky k dosažení nejlepší složitosti použijeme binární půlení, ale pokud hodnota b je malá, tak v praxi je lepší lineárně projít všechny klíče.

(a,b)-strom: Aplikace a volby parametrů a, b

→ čeští (a-b) stromy se mezinárodně vůbec nepoužívá

Podobné datové struktury

- B-tree, B+ tree, B* tree
- 2-4-tree, 2-3-4-tree, atd.

Aplikace

- File systems např. Ext4, NTFS, HFS+
- Databáze

Chceme mít co nejvíc klíčů ve vrcholu, protože jejich porovnání je levnější než další načítání z disku

Volba parametrů a, b

Hodnotu b volíme tak, aby se jeden vrchol vešel do bloku a $a = \lceil b/2 \rceil$

- 4KB stránka, 32-bitový klíč a ukazatel $\Rightarrow$ (256,511)-strom
- 64B řádka keše $\Rightarrow$ (4,7)-strom → ahorát se vejde do bloku

Proč se hodí mít data v listech a proč ve vrcholech?

- Když nebudu mít data ve vnitřním vrcholu, zůstane mi více místa v bloku a pak bude strom mít menší hloubku, bude se v něm lépe vyhledávat.

Když mám ale všechno v listech, tak defacto ulíčce nad nima jsou jen duplicitou hodnot listů a zabírá to místo na disku.

(a,b)-strom: Počet štěpení při operacích INSERT

Věta (počet modifikovaných vrcholů při vytvoření stromu operací INSERT)

Amortizovaný počet štěpení v libovolné posloupnosti operací INSERT začínající na prázdném stromu je $\mathcal{O}(1)$. ①

Důkaz

- Při každém štěpení vrcholu vytvoříme nový vnitřní vrchol
- Po vytvoření má strom nejvýše n vnitřních vrcholů
- Celkový počet štěpení je nejvýše n a počet modifikací vrcholů je $\mathcal{O}(n)$
- Amortizovaný počet modifikovaných vrcholů na jednu operaci INSERT je $\mathcal{O}(1)$

– časová složitost je ale stále $O(\log n)$, protože tam stejně probíhá FIND

– čím méně zápisů, tím déle disk vydrží... (AVL stromy mají $O(\log n)$ zápisů...)

1. Při jedné vyvažovací operaci (štěpení vrcholu) je počet modifikovaných vrcholů omezený konstantou (štěpený vrchol, otec a synové). Asymptoticky jsou počty modifikovaných vrcholů a vyvažovacích operací stejné.

(a,b)-strom: Počet štěpení a slučování

Věta (Huddleston, Mehlhorn, 1982)

Amortizovaný počet štěpení a slučování v libovolné posloupnosti k operací INSERT a DELETE v $(a, 2a)$-stromu je $\mathcal{O}(1)$ a celkový počet je $\mathcal{O}(n + k)$.

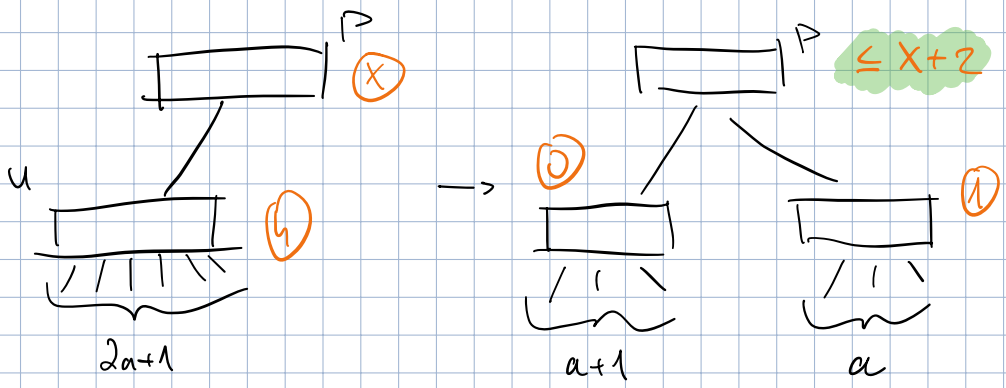
Důkaz

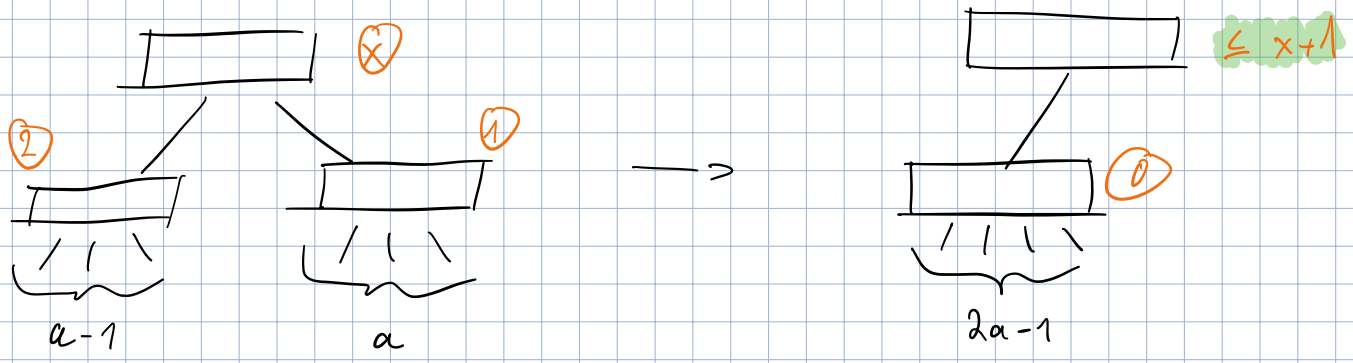
- Potenciál vrcholu u závisí na počtu jeho synů takto: ①

synů	a-1	a	a + 1	...	2a-1	2a	2a+1
$\Phi(u)$	2	1	0	...	0	2	4

sloučím — štěpím

- Potenciál stromu je součet potenciálů vrcholů
- Změny potenciálu při štěpení vrcholu u s otcem p jsou:
  - u s potenciálem 4 rozdělíme na dva vrcholy s potenciály 0 a 1
  - Potenciál vrcholu p se zvýší nejvýše o 2 — → šel jsem v tabulce doprava
  - Potenciál se sníží alespoň o 1, což zaplatí štěpení — → samotné u mělo 4, které u_1 a u_2 mají 1, tedy $2-(4-1)=-1$
- Změny potenciálu při slučování vrcholů u a u' s otcem p jsou:
  - $\Phi(u) = 2$, $\Phi(u') = 1$ a sloučený vrchol má potenciál 0
  - Potenciál vrcholu p se zvýší nejvýše o 1 — → šel jsem v tabulce doleva
  - Potenciál se sníží alespoň o 2, což zaplatí slučování — → mám vrcholy navíc, ty zahodím
- Přidání, smazání a přesun vrcholu zvýší potenciál nejvýše o 2, ale tyto operace provádíme nejvýše jednou
- Jelikož $0 \leq \Phi \leq 4n$, celkové snížení potenciálu při všech operacích je $\mathcal{O}(n)$





Smazání potřebuje alespoň jednu minci
Insert potřebuje alespoň dvě mince

1. Kořen může mít méně než $a - 1$ synů a nemáme pro něj definovaný potenciál. Rozmyslete si, jak do důkazu doplnit práci s kořenem. Důležité je, že štěpení či slučování mimo kořen může být logaritmicky mnoho, takže je nutné je platit z potenciálu, ale u kořene nastanou jen jednou.

(a,b)-strom: Balancování shora dolů

Cíl

Umožnit efektní paralelizaci operací Find, Insert a Delete (předpoklad: $b \geq 2a$).

při prev. štěpení budu mít $\geq a$ vrcholů, takže podmínka je splněna.

Operace Insert

Preventivně rozdělit každý vrchol na cestě od kořene k hledanému listu s b syny na dva vrcholu.

+ v průběhu operací jsou invarianty dodrženy, takže ostatní vláknu na tom můžou pracovat.

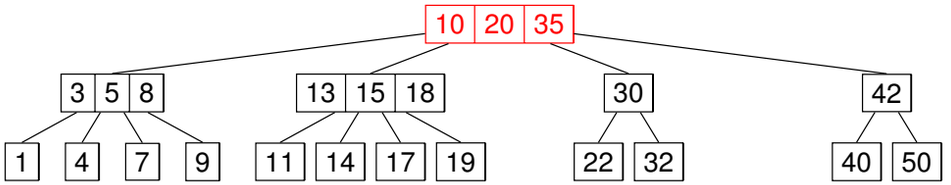
Operace Delete

Preventivně sloučit každý vrchol na cestě od kořene k hledanému listu s a syny s bratrem nebo přesunout synovce.

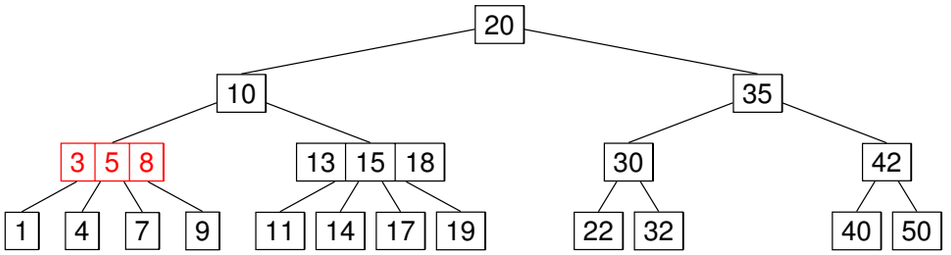
Takže obě operace nepotřebují, abych se musel vracet — => stačí mít zamčený jen vlastní vrchol a jeho otce

(a,b)-strom: Balancování shora dolů: Příklad

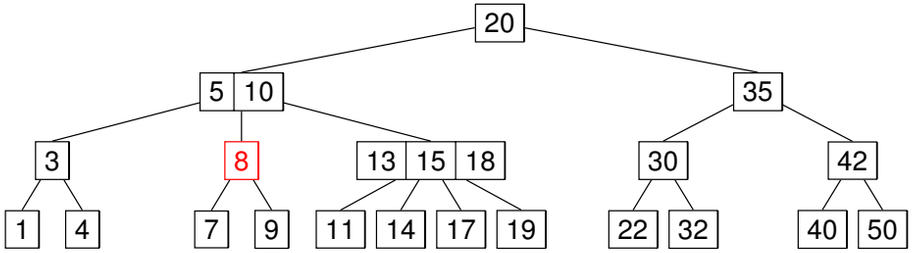
- Vložte prvek s klíčem 6 do následujícího (2,4)-stromu



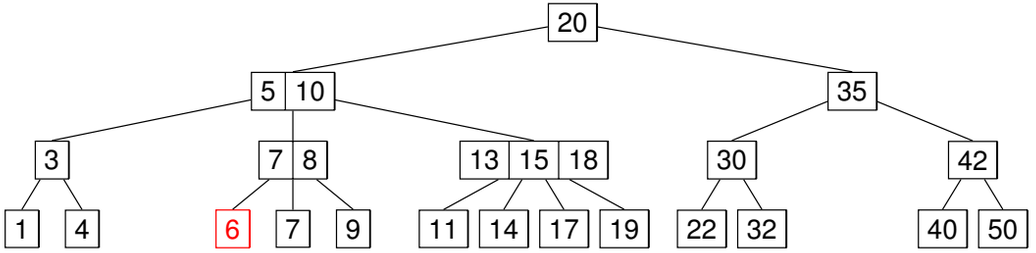
- Nejprve rozdělíme kořen



- Pak pokračujeme do levého syna, který taky rozdělíme



- Vrchol s klíčem 8 není třeba rozdělovat a nový klíč můžeme vložit

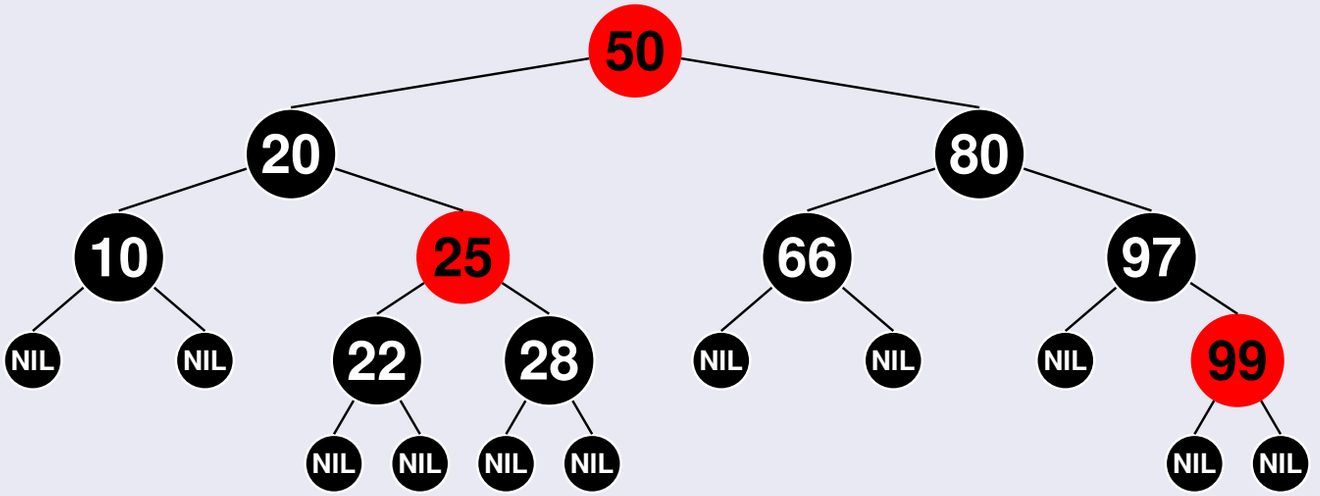


Červeno-černé stromy (Guibas, Sedgewick, 1978)

Definice

1. Binární vyhledávací strom s prvky uloženými ve všech vrcholech
2. Každý vrchol je černý nebo červený
3. Všechny cesty od kořene do listů obsahují stejný počet černých vrcholů
4. Otec červeného vrcholu musí být černý
5. Listy jsou černé ①

Příklad

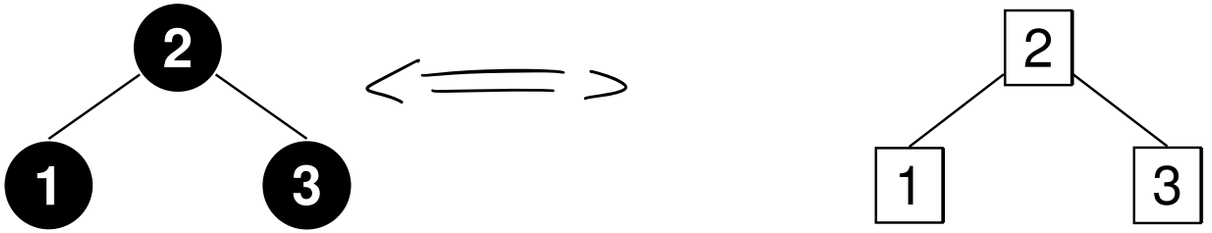


1. Nepovinná podmínka, která jen zjednodušuje operace. V příkladu uvažujeme, že listy jsou reprezentovány NIL/NULL ukazateli, a tedy imaginární vrcholy bez prvků. Někdy se též vyžaduje, aby kořen byl černý, ale tato podmínka není nutná, protože kořen můžeme vždy přebarvit na černo bez porušení ostatních podmínek.

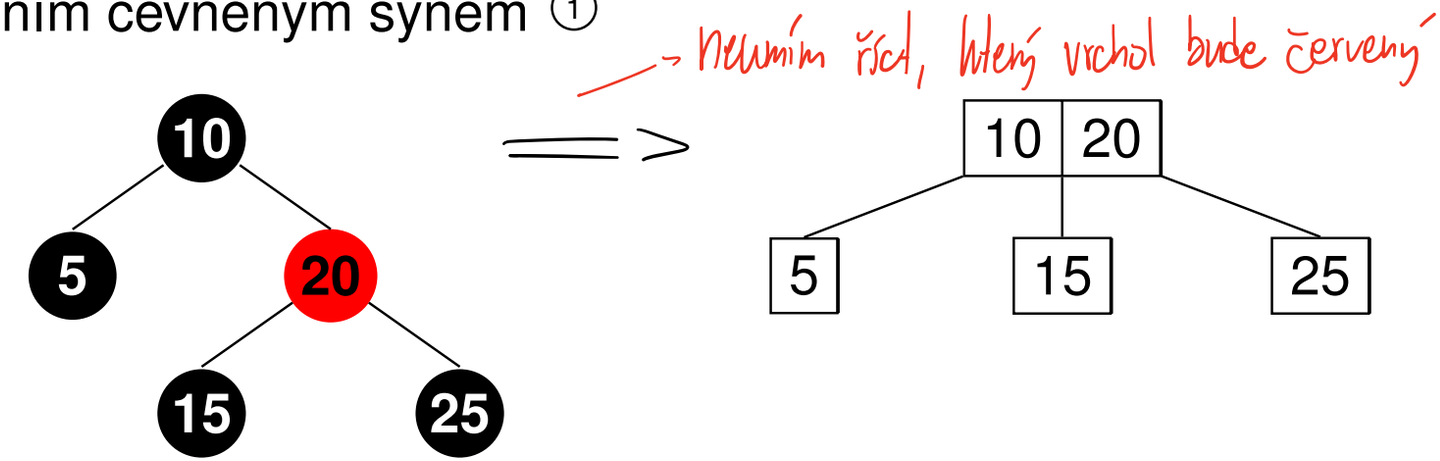
Červeno-černé stromy: Ekvivalence s (2,4)-stromy

Každému černému vrcholu odpovídá jeden vrchol (2,4)-stromu

- Vrchol bez červených synů

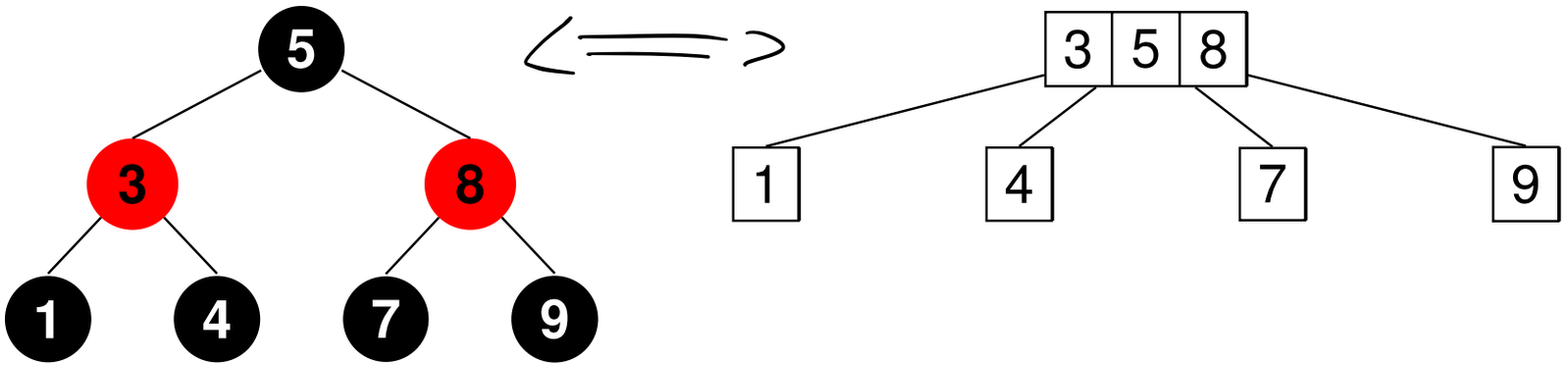


- Vrchol s jedním čevneným synem ①



→ nevíme říct, který vrchol bude červený

- Vrchol s dvěma červenými syny



1. Převod mezi červeno-černými stromy a (2,4)-stromy není jednoznačný, protože vrchol (2,4)-stromu se třemi syny a prvky $x < y$ lze převést na černý vrchol červeno-černého stromu s prvkem x a pravým červeným synem y nebo s prvkem y a levým červeným synem x.

Červeno-černé stromy: Důsledky ekvivalence s (2,4)-stromy

Vlastnosti

- Výška červeno-černého stromu je nejvýše $2 + 2\log_2 n$
- Časová složitost operací Find, Insert a Delete je $\mathcal{O}(\log n)$
- Pro vkládání a mazání vrcholů existuje varianta shora dolů i zdola nahoru
- Amortizovaný počet změn stromu při balancování zdola nahoru je $\mathcal{O}(1)$

– pokud by nás zajímalo, jak probíhají operace Insert a Delete, je vhodné si vždy udělat příběh (2,4)-stromu

Aplikace

- Asociativní pole např. std::map and std::set v C++, TreeMap v Java
- The Completely Fair Scheduler in the Linux kernel
- Computational Geometry Data structures
- Persistentní datové struktury

hehe: pokud chce kvantum porovnávání fcí, tak je to stromová struktura, pokud hashování, je to hashovací struk.

Červeno-černé zabírají (v rámci konstant) méně místa...

A-sort (Guibas, McCreight, Plass, Roberts, 1977)

Cíl

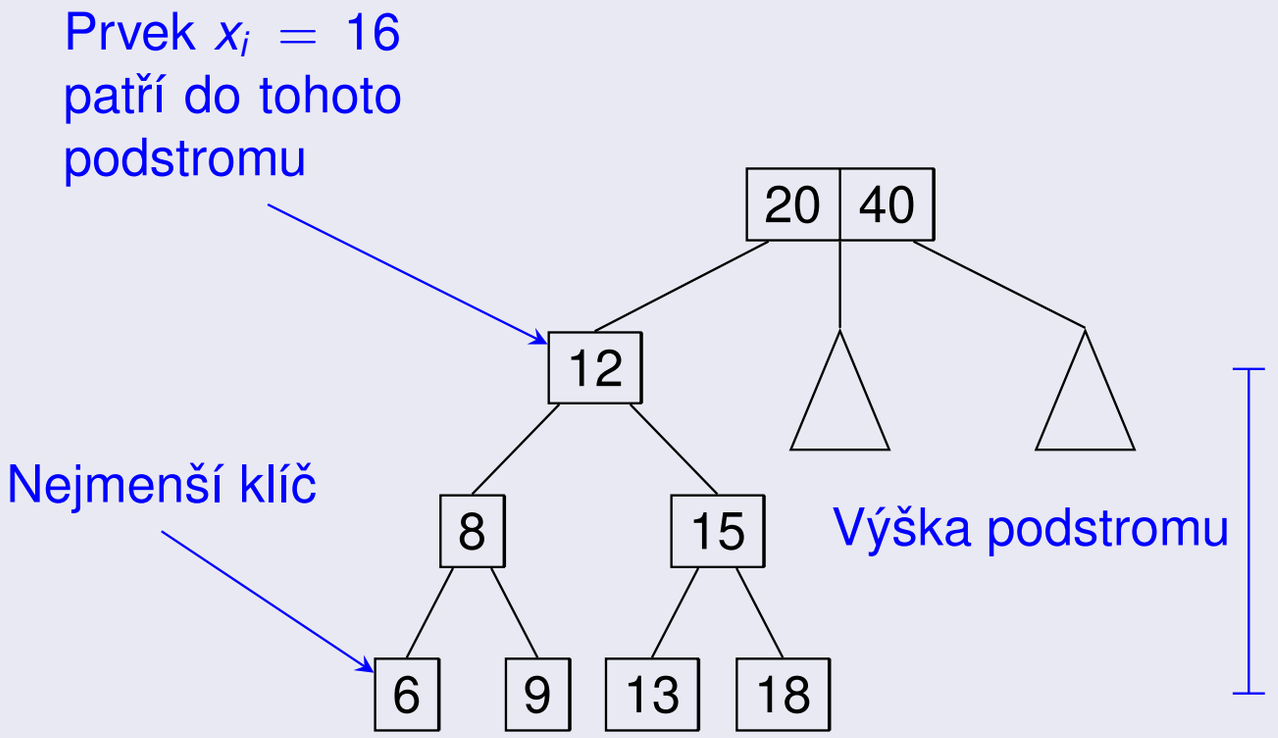
Setřídit „skoro“ setříděné pole

Modifikace (a,b)-stromu

Máme uložený ukazatel na vrchol s nejmenším klíčem

Příklad: Vložte klíč s hodnotou $x_i = 16$

- Začneme od vrcholu s nejmenším klíčem a postupujeme ke kořeni, dokud x_i nepatří podstromu aktuálního vrcholu
- V rámci tohoto podstromu spustíme operaci Insert
- Výška podstromu je $\Theta(\log f_i)$, kde f_i je počet klíčů menších než x_i



A-sort: Algoritmus

Input: Posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_n$

1 $T \leftarrow$ prázdný (a,b)-strom
2 **for** $i \leftarrow n$ **to** *1* `# Prvky procházíme od konce`
3 **do**
    `# Najdeme podstrom, do kterého vložíme` x_i
4 $v \leftarrow$ list s nejmenším klíčem
5 **while** *v není kořen a* x_i *je větší než nejmenší klíč v otci vrcholu v* **do**
6 $v \leftarrow$ otec v
7 Vložíme x_i do podstromu vrcholu v

Output: Projdeme celý strom a vypíšeme všechny klíče (in-order traversal)

A-sort: Složitost (Brown, Tarjan, 1978; Mehlhorn, 1979)

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

Jestliže $a_1, \ldots, a_n$ nezáporná reálná čísla, pak platí

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Časová složitost

1. Nechť $f_i = |\{j > i; x_j < x_i\}|$ je počet klíčů menších než x_i, které již jsou ve stromu při vkládání x_i
2. Nechť $F = |\{(i,j);\ i > j, x_i < x_j\}| = \sum_{i=1}^{n} f_i$ je počet inverzí
3. Složitost nalezení podstromu, do kterého x_i patří: $\mathcal{O}(\log f_i)$
4. Nalezení těchto podstromů pro všechny podstromy
   $\sum_i \log f_i = \log \prod_i f_i = n \log \sqrt[n]{\prod_i f_i} \leq n \log \frac{\sum_i f_i}{n} = n \log \frac{F}{n}$. ① čistě přidání odmocniny a n...
5. Rozdělování vrcholů v průběhu všech operací Insert: $\mathcal{O}(n)$
6. Celková složitost: $\mathcal{O}(n + n \log(F/n))$
7. Složitost v nejhorším případě: $\mathcal{O}(n \log n)$ protože $F \leq \binom{n}{2}$
8. Jestliže $F \leq n \log n$, pak složitost je $\mathcal{O}(n \log \log n)$ ②

1. Místo AG nerovnosti můžeme použít Jensenovu nerovnost, ze které přímo plyne $\frac{\sum_i \log f_i}{n} \leq \log \frac{\sum_i f_i}{n}$.
2. Tento algoritmus je bohužel efektivní jen pro „hodně skoro“ setříděné posloupnosti. Jestliže počet inverzí je $n^{1+\epsilon}$, pak dostáváme složitost třídění $\mathcal{O}(n \log n)$, kde ϵ je libovolně malé kladné číslo.

Příští týden

Jak navrhovat a analyzovat algoritmy a datové struktury, aby efektivně využívali keše procesorů?