

Zadání:

$\forall$ forall $\exists$ exists

Deadline: 2024-11-07 10:40 (in 12 days)

Max points: 3.00

Vladan Majerech — 2024-10-15 15:31 (10 days ago) — [reply](#)

Ukažte, že jazyk L je rozhodnutelný, právě když existují rozhodnutelné jazyky A a B , pro které platí, že $L = \{x \mid \exists y \langle x, y \rangle \in A\} = \{x \mid \forall y \langle x, y \rangle \in B\}$.

Řešení:

A, B jsou rozhodnutelné $\Rightarrow L$ je rozhodnutelný

Pak existuje stroj $M(A)$, který rozhoduje $\langle x, y \rangle \in A$. Ptám-li se proto, jestli $x \in L$, mohu spustit vlastní stroj $M(A)$, který bude procházet všechny y a pro jednotlivou dvojici spustí $M(A)$, který odpoví zda $\langle x, y \rangle \in A$.

Jakmile nějakou najde, může skončit, $x \in L$.

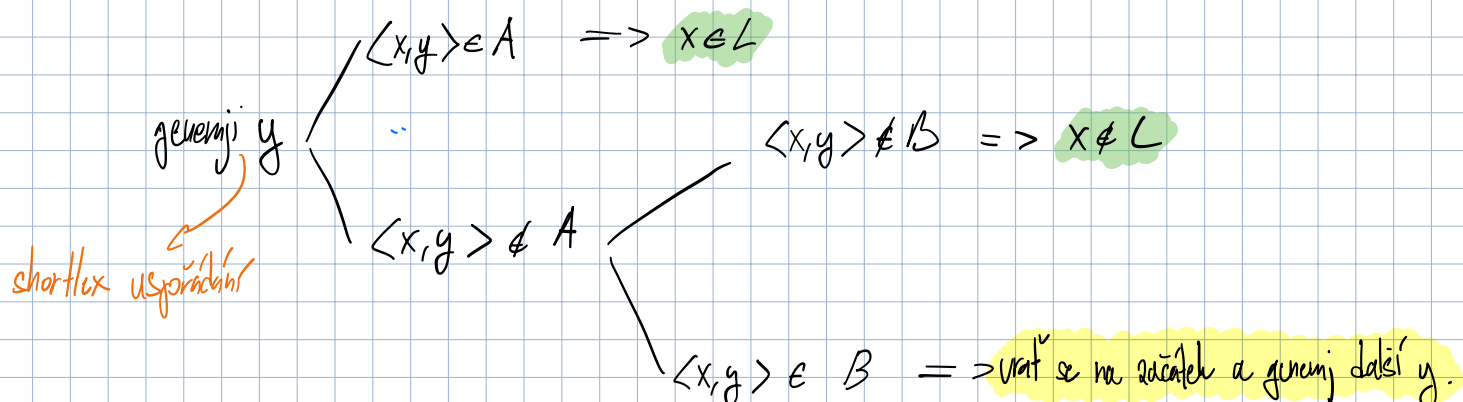
Dávnou existuje stroj $M(B)$, který rozhoduje $\langle x, y \rangle \in B$. Ptám-li se proto, jestli $x \in L$, mohu spustit vlastní stroj $M(B)$, který bude procházet všechny y a pro jednotlivou dvojici spustí $M(B)$, který odpoví, zda $\langle x, y \rangle \in B$.

Jakmile nějakou najde, může skončit, $x \notin L$.

$\hookrightarrow$ protože je rozhodnutelný, tak umí odpovědět na všechno ano/ne.

Každý stroj sám o sobě ale musí přijít nekončící mnoho y , aby dokázal, že neexistuje protipříklad. Můžeme ale posílat stroje paralelně se stejným y . Pak vždy musí alespoň jeden stroj (pro A nebo B) říct $x \in L$ nebo $x \notin L$.

Nechť dostaneme x , spustíme stroj $M(A$ nebo $B)$:



Vždy musím po konci mnoha genemách y zastavit, protože jediná potenciálně nekonečná větev výpočtu je ta spodní $\langle x, y \rangle \notin A \wedge \langle x, y \rangle \in B$. Nikdy však nemusím projít všech (nekonečně) y , jelikož aby $x \in L$, musí alespoň jedna dvojice $\langle x, y \rangle \in A$, nebo najdu při procházení dříve protipříklad $\langle x, y \rangle \in B$.

L je rozhodnutelný $\Rightarrow A, B$ jsou rozhodnutelní.

Tím, že jazyk L je rozhodnutelný, existuje TS M rozhodující takový jazyk.

Pomocí M sestavíme TS N přijímající jazyk $Y = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in L \}$.

Takový jazyk je také rozhodnutelný.

$\hookrightarrow$ tedy N přijme $\langle x, y \rangle \Leftrightarrow M$ přijme x .

Nahlédneme, že jazyk speciálně splňuje $\{ x \mid \exists y \langle x, y \rangle \in Y \} = L$ (podmínky u jazyka B)

Tedy speciálně $\underline{Y = B = A}$.

Obecně bude platit $A \subseteq B$, my ale můžeme vybrat takové dva jazyky, že platí rovnost.