Tomáš Domes — 2022-12-04 17:04 (6 days ago) — reply

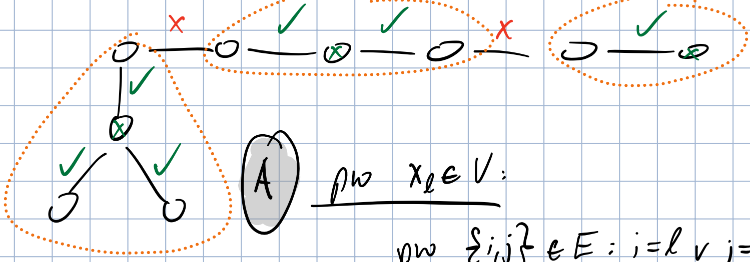
Mějme graf G reprezentující město (jako na cvičení – křižovatky jsou vrcholy, ulice jsou hrany). Analýzou policejních dat bylo zjištěno, že naprostá většina zločinů je páchána přímo na křižovatkách. Protože bychom chtěli ušetřit za mzdy strážníků, změníme podmínku pro hlídání města – bude nám stačit, aby z každé křižovatky bylo vidět nějakého strážníka (Tedy aby pro každý vrchol bez strážníka platilo, že strážník byl umístěn v alespoň jednom z jeho sousedů.). Zadání problému opět zní, zda dokážeme dané město uhlídat pomocí k strážníků. Dokažte že tento problém a SAT jsou na sebe vzájemně převoditelné.

Nejdříve vytvořím klauzule, které pomocí implikace vyžadují, aby každý vrchol měl alespoň 1 sousední vrchol s policajtem. (A)

Následně pomocí tabulky n×k zjistím, aby vždy bylo nejvýše k disjunktních vrcholů obsazeno. (B)

Sjednotím všechny klauzule do jedné formule (C)

Konstrukce převodu:



(A) pro $x_\ell \in V$:

pro $\{i,j\} \in E : i=\ell \vee j=\ell$ → pokud vrchol je incidentní s hranou, co je incidentní s policistou.

$$\neg x_\ell \Rightarrow (x_i \vee x_j)$$

$$\underbrace{x_\ell \vee x_i \vee x_j}_{F_{\ell,1}}$$

Policista nyní bude přímo na vrcholu, nebo na hraně přilehlé

Každý vrchol musí být hlídán

V grafu $G=(V,E)$:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_{|V|}$$

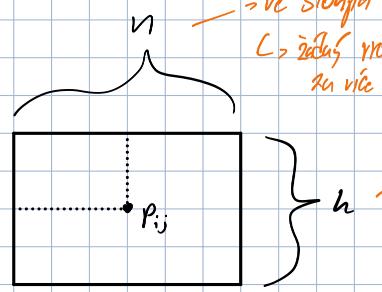
(tedy zjednodušení)

pro $x_\ell \in V$:

$$\underbrace{F_{\ell,1} \vee F_{\ell,2} \vee \dots \vee F_{\ell,|\{i,j\} \in E : i=k \vee j=k|}}_{C_k}$$

(B)

Ještě musím zjistit, aby bylo strážníků právě k. Opět pomocí tabulky:



→ ve sloupci max 1
↳ žádný vrchol nemůže být za více strážníků

v řádku alespoň 1

v řádku max 1
↳ strážník reprezentuje právě 1 vrchol

Pro : $1 \le i,i' \le k,\ 1 \le j,j' \le n$

Ve sloupci max 1:

$$p_{ij} \Rightarrow \neg p_{i'j} \sim \neg p_{ij} \vee p_{i'j}$$

V řádku max 1:

$$p_{ij} \Rightarrow \neg p_{ij'} \sim \neg p_{ij} \vee p_{ij'}$$

V řádku alespoň 1:

$$p_{i1} \vee p_{i2} \vee \dots \vee p_{in}$$

(C) + Celé dohromady:

$$p_{ij} \Rightarrow x_j$$

Celá formule se bude skládat z klauzulí, které vznikly v částech (A), (B), (C) přes všechny určené rozsahy.

Důkaz převodu:

Stejně jako p. Hric na přednášce dokážu, že odpověď ANO se zachovává a že převod je polynomiální.

1) Polynomiálnost převodu:

- Klauzule vytvářím iterací přes všechny incidentní hrany uvnitř iterace přes vrcholy.
  - tedy $O(n^2)$ čas, prostor pak také $O(n^2)$.
- Následně vytvářím klauzule pro tabulku $n \times k$, kde iteruji přes řádky a sloupce a pro každou pozici následně vytvářím klauzule ostatních řádků a sloupců, tedy $O(n^4)$.

Celkem tedy alg. převodu běží v $O(n^4)$. Můžeme tedy i jeho inverz považovat za polynomiální.

2) Zachování odpovědi:

Chceme: Existuje rozmístění k-policajtů $\Leftrightarrow$ Formule je splnitelná.

$\Leftarrow$: Pak musí existovat právě k pozitivních literálů (podle tabulky), které zároveň splňují jednotlivé C_u, tudíž splňují podmínku zadání, podle které je C_u klauzule tvořena.

$\Rightarrow$ Pak jsou kladně ohodnoceny všechny C_u vzhledem k definici a zároveň budou splněny „tabulkové" klauzule, tedy celá formule bude splněna. $\boxed{\times}$

Čili mám hotový převod Policajt $\rightarrow$ SAT.

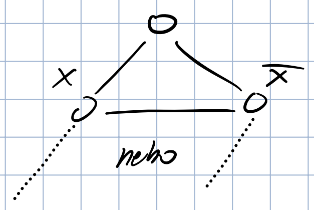
Nyní SAT -> Policajt:

Použiju převod SAT -> 3-SAT z přednášky:

Pak formule vypadá následovně: $(l_1 \vee l_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee l_3 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee l_4 \vee x_3) \wedge \dots \wedge (\bar{x}_{i-3} \vee l_{i-1} \vee l_i)$,
kde l_i jsou původní literály formule a x_i jsou pomocné proměnné převodu

Chci policajtem řešit SAT. SAT je řešitelný <=> existuje rozložení k policistů

(A) Jednotlivé proměnné budu reprezentovat v grafu tímto trojúhelníkem:



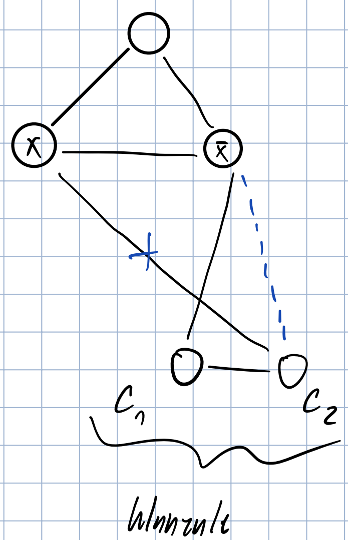
kde $x, \bar{x}$ jsou ohodnocení proměnné, 3. vrchol je pomocný,
který vynucuje ohodnocení (obsazení) proměnných literálů namísto vrcholů klauzulí
a .... je hrana, kterou budu spojovat jednotlivé klauzule.

Vytvořím si takový Δ pro každou proměnnou.

Následně budu mít formuli (nyní uvažme 3-SAT). Každou klauzuli budu reprezentovat jako jeden vrchol, který hranami spojím do trojúhelníků proměnných, které klauzule obsahuje, a to i s ohledem na hodnotu literálu ($x / \bar{x}$).
Vrcholy reprezentující klauzule spojím do jednoho řetězce.

(B) Následně se zeptám, zdali jde takový graf uhlídat k policisty, kde $k = \#$proměnných
Pokud ANO, SAT formule je splnitelná, pokud NE, SAT formule je nesplnitelná.

Jednoduchý příklad pro ilustraci:



C_1 C_2

$\neg x \wedge x$ $k=1$

Nejde pokrýt

$\neg x \wedge \neg x$ $k=1$

Lze pokrýt!

Důkaz:

1) Převod je polynomiální:

jelikož v čase $O(n+m)$

pouze tvoří podgrafy

a spojuje vrcholy klauzulí.

2) Zachovává odpověď:

SAT je splnitelný, pokud existuje nastavení k proměnných, které splní všechny klauzule.
Pokud je SAT splnitelný, jsou všechny klauzule (C_1 — C_m) hlídány. Máme však jen k-strážníků, kde $k = \#$proměnných, tedy abychom uhlídal i všechny Δ, musí být policajt i na každém trojúhelníku na pozici x nebo $\bar{x}$ a to právě 1.

Naopak pokud lze zkonstruovaný graf uhlídat právě k-policisty, kde $k = \#$proměnných, pak jsou určitě uhlídány všechny Δ právě 1 policistou a zároveň jsou hlídány všechny klauzulní vrcholy. Tedy rozložení policistů na vrcholech dokonce určuje model teorie definované formulí, jelikož z každého Δ (speciálně x nebo $\bar{x}$) musí vést hranu do klauzulí, které daná proměnná splňuje, tedy zároveň hlídá.

Tomáš Domes — 2022-12-04 17:03 (10 days ago) — reply

Mějme vektor y délky n, který vznikl rotací vektoru x o c pozic. Tedy $y_j = x_{(j+c) \bmod n}$. Vyjádřete Fourierův obraz $F(y)$ pomocí Fourierova obrazu $F(x)$.

Řešení úlohy by tedy mohlo být například následující tvrzení včetně důkazu (následující výraz je pouze příklad a neplatí, nesnažte se ho, prosím, dokázat): $F(y)_j = (j+c)^8 F(x)_{(j^3+c-2) \bmod n}\ \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$

Z definice víme: $F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \omega^{jk}$. Ten výraz si upravím, abych dostal do výrazu konstantu c. Tedy:

$$F(x)_j = \sum_{k=c}^{n-1+c} x_{k-c} \cdot \omega^{j\cdot(k-c)} \longrightarrow F(x)_j = \omega^{-jc} \cdot \sum_{k=c}^{n-1+c} x_{k-c} \cdot \omega^{jk}$$

$$F(y)_j = \sum_{k=c}^{n-1+c} x_{k \bmod n} \cdot \omega^{j\cdot(k-c)}$$

$$F(y)_j = x_c \cdot \omega^0 + x_{c+1} \cdot \omega^{j\cdot 1} + x_{c+2} \cdot \omega^{j2} + \dots + x_{n-1} \cdot \omega^{j(n-1-c)} + x_0 \cdot \omega^{j\cdot(n-1-c+1)} + x_1 \cdot \omega^{j\cdot(n-1-c+2)} + \dots + x_{c-1} \cdot \omega^{j(n-1)}$$

$$\frac{F(x)_j}{\omega^{-jc}} = x_c \cdot \omega^{j(2c)} + x_{c+1} \cdot \omega^{j(2c+1)} + x_{c+2} \cdot \omega^{j(2c+2)} + \dots + x_{n-1} \cdot \omega^{j(n-1+c)} + x_0 \cdot \omega^{jc} + x_1 \cdot \omega^{j\cdot(c+1)} + \dots + x_{c-1} \cdot \omega^{j(2c-1)}$$

nyní mě zajímá rozdíl koeficientů

zde jsem si rozepsal sumy $F(x)_j$ a $F(y)_j$, abych je mohl porovnat. Zároveň u $F(x)_j$ jsem díky komutativitě součtu prvky posunul pro lepší přehled

$$\frac{\omega^{j(2c+1)}}{\omega^{j}} = \omega^{2jc+j-j} = \omega^{2jc}$$

$$F(y)_j = \frac{F(x)_j}{\omega^{-jc} \cdot \omega^{2jc}} = \frac{F(x)_j}{\omega^{jc}}$$