

Sestřijte hardware síť pro porovnání 2 n-bitových čísel v hloubce $O(\log n)$, která vrátí 1 pokud $x < y$, jinak vrátí 0.

Mějme $x: 00100$
 $y: 01000$

Pozorování 1: Mějme binární číslo se sanyými

Pozorování 2:

nulami levě pozice i . Pak je vždy větší než číslo ≤ 1 ve všech pozicích $> i$:

Pokud porovnáním x, y a y má jako první (při přechodu zleva) 1, zatímco x stále nemá, je y určitě větší.

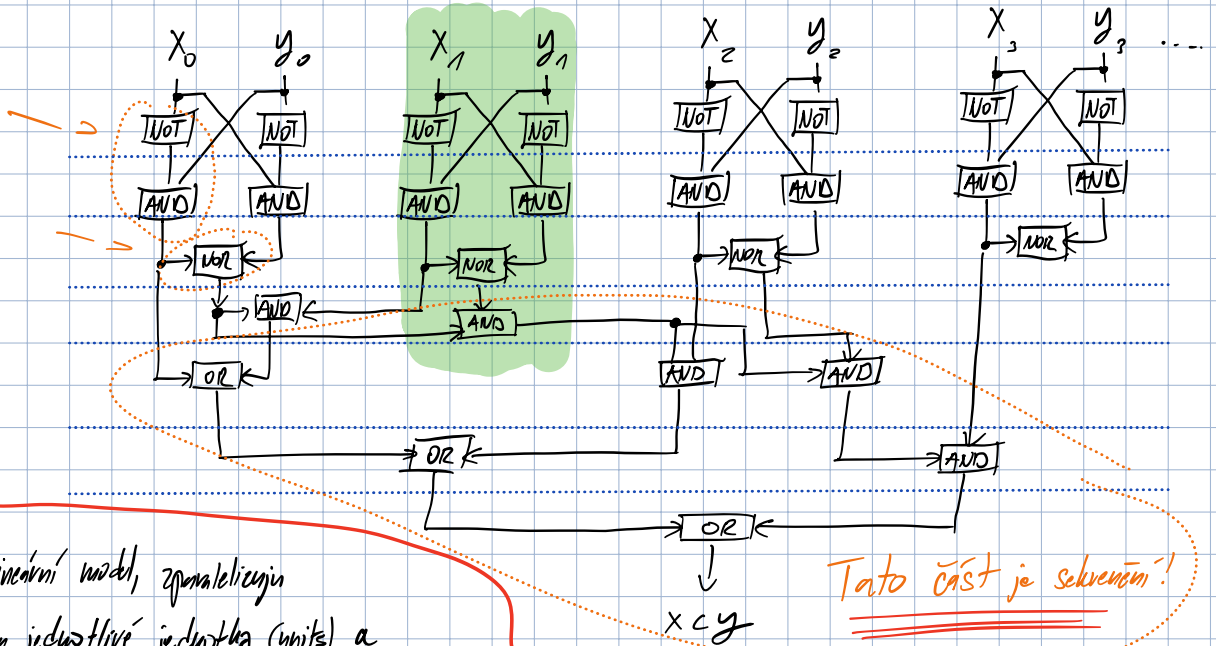
$00011 \dots < 00100 \dots$

Hledám $x < y$:

$x_0 \rightarrow$ MSB, $x_{n-1} \rightarrow$ LSB !

Levá větev vrátí 1, pokud $y_0 > x_0$.

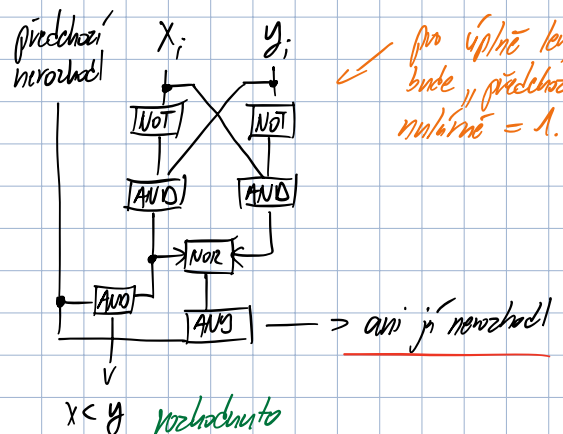
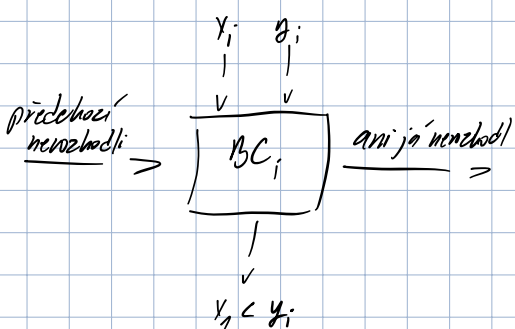
NOR vrátí 1 pouze pokud $x_0 = y_0$ - což jinykni strany zsumovají, ve výsledku rozhodne nižší bit.



Tato část je sekvencí!

Jelikož jsem vytvořil lineární model, zmatelnicuju ho pomocí převodní na jednotlivé jednotky (units) a předpřetkám si vstupy.

Některé porovnání 1-bitů je nyní box (Bit Computer)



pro úplně levý bit bude "přechází nerovnosti" nulárně = 1.

Tabulka pro 1-bit bloki:

		x	
		0	1
y	0	<	0
	1	0	<

Ude: **0** = bylo rozhodnuto (x < y or x > y),
 tedy se nic nepřenáší dál
< = nebylo nijak rozhodnuto
 (kopijnu přenos)

Tabulka pro chování karabinového bloku:

		L	
		0	<
R	0	0	0
	<	0	<

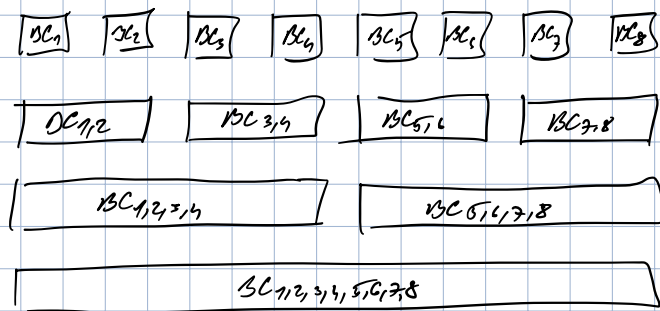
pohled bylo v našem bloku rozhodnuto, navíc se dál nic rozhodovat nebude, takže 0.
 pohled vlevo se rozhodlo, ale výnos ano, celkově se třeba v bloku rozhodlo.
 pohled ani L, R nezohledlo, celý blok nezohledl.

1 nikdy neženemji, protože buď kopijnji (rozhodl jsem) nebo pohleji (rozhodl jsem a další bity už rozhodnou).

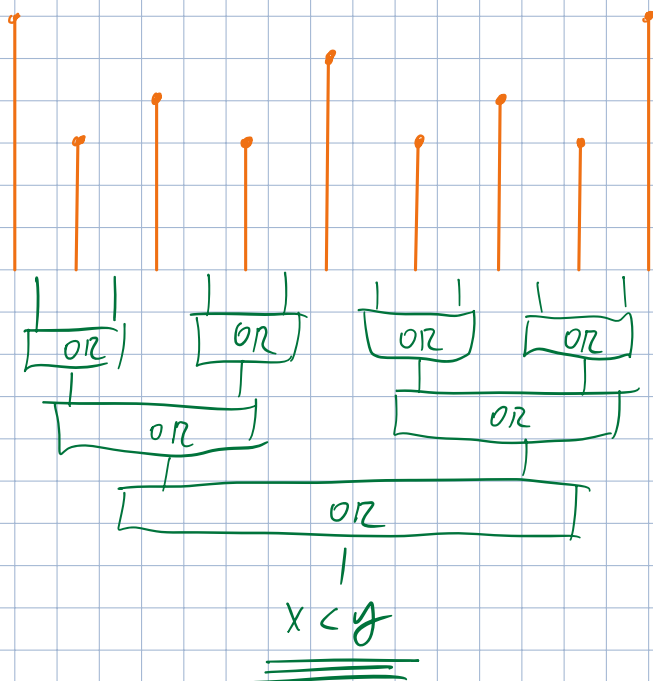
Tedy vytvořím obdobnou „unit“ jako u binární sčítanky a opět budu počítat <

oběma případy vstupů „předchozí rozhodli“, tedy si to předpřítám, stejně jako jsem to dělali m předmáče.

Tedy si vytvořím síť karabinových bloků (units) a vyprítám chování jednotlivých bloků.



Zde bude hloubka celkem $O(\log n)$



Zde pro změnu „rozhodnutí“
 Umíme vyprítat „přenosy“ mezi jednotlivými units.
 Díky rozdělení výše bude hloubka opět $O(\log n)$, protože postupně můžeme vyhodnotit paralelně 2, 4, 8... units.

V posledním kroku musím vzít výsledky z jednotlivých units a postupně udělat OR mezi všemi, což se dá také paralelizovat mezi dvojicemi, čímž opět získáme $O(\log n)$ hloubku.

Celkové je tedy hloubka $3 \cdot O(\log n) \approx O(\log n)$

Jednotlivé units můžeme považovat za konstantní hloubky ($h=4$).

Ve výsledku jsem tak lineárně se změňňou hloubku předpřítání výsledku zredhoval na $O(\log n)$.

Dokážte, že lib. booleanskou funkci s k vstupy lze spočítat booleanovými obvody hloubky $O(k)$

s $O(2^k)$ hradly.

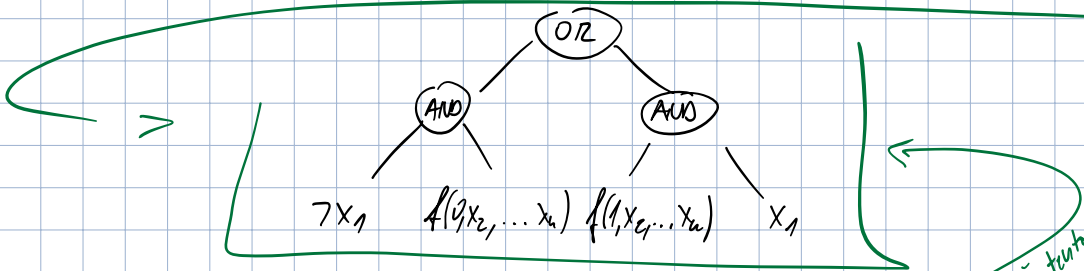
Pozn.: Booleanovské funkce se skládají pouze z AND, OR, NOT gátů.

- U každé z těchto gátů má výstupní arita právě 1, vstupní právě 1.

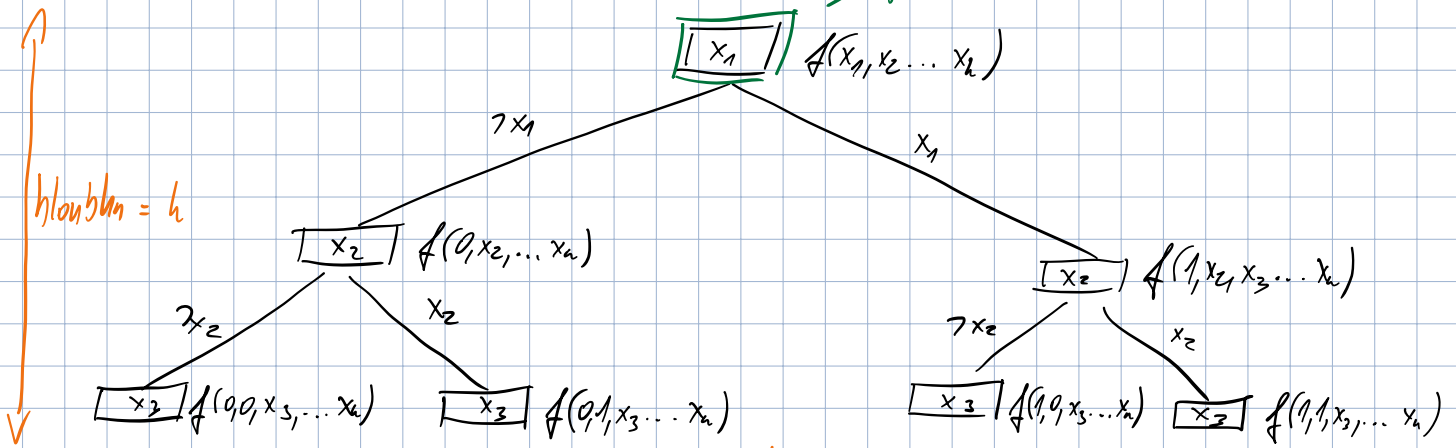
Mějme nyní booleanskou funkci $f: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ reprezentovanou jako $f(x_1, \dots, x_k)$.

Pak můžeme tabulku funkce vyjádřit jako $(x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_k)) \vee (\neg x_1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_k))$.

Tabulku funkce vztodně musí platit, jelikož de facto jím propozuje proměnnou mimo výpočet a její hodnota ve výpočtu fixuje. Zároveň tabulku funkce lze reprezentovat takto:



Avšak takto bychom mohli rozepsat rozklad dále:



☺) Mimo jiné vznikne úplný binární strom : tedy postupně fixovat proměnné a vstřídit se podle jejich uvoňování (0/1) chodíme.

Až dojdeme do listů, kde budou všechny proměnné funkce zafixované, takže tabulku funkce můžeme nahradit nulárními hradlem odpovídající výsledku pravdivostní tabulky pro zadanou posloupnost proměnných $x_1 - x_k$.

Očividně je hloubka $= k$, tedy počet proměnných, jelikož v každé vrstvě zafixují právě jednu další proměnnou. Celkem jich mohou zafixovat k .

Tedy hloubka je $O(k)$

Pro počet hradel musí platit následující: $S(2) = 1 \rightarrow$ tedy pro funkci $f(x_1, x_2)$ s dvěma fixovanými proměnnými stačí 1 nulární hradlo s hodnotou 2 tabulky.

$$S(n) = 2 \cdot S(n-1) + 6$$

Odkvadrtnutí:

2 - krát: v každé vrstvě se rozdělím na dvě strany, kde druhou proměnnou zafixuji a chybí mi již $n-1$ nezafixovaných proměnných

$S(n-1)$: V každé vrstvě potřebuji znát hodnotu funkce, která má již 2 jedny méně nezafixovaných proměnných, jelikož jsem jednou na vrstvě aktuálně zafixoval. pro nastavení hodnot

+6: V každém boxu $[x_i]$ → popsáno výše používají: 1x OR, 2x AND, 1x NOT (pro negaci x_i), nulární 1, nulární 0.

Dostáváme tedy rekurenci, kdy

$$S(n) = \frac{7}{4} 2^n - 6 = O(2^n)$$

Tedy celkem hradel bylo použito $O(2^n)$



Jelikož mi rekurence není možné přímo použít Master Theorem, dovolil jsem si na výsledek rekurence použít Wolfram Alpha.

Celkově je takový postup platný, jelikož je:

- Uzavřený: pro k vrstevních hradel mít všechny proměnné zafixované
- Úplný: nastavením (nějak) každou proměnnou
- Správný: Pro každé ohodnocení funkce můžem za podmínky splnění ohodnocení druhé listu

(x_i ^{AND} $f(x_0, \dots, x_{i+1}, \dots, x_n)$) distribuovat výsledek výše.