Převod mezi SAT -> 3-SAT: ☒

Klauzule $(l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ pro $k > 3$:

nahradím klauzulemi: $(z \vee l_1 \vee l_2)$

a $(\neg z \vee l_3 \vee l_4 \dots)$

z -> nová umělá proměnná

-> Převod běží v polynomiálním čase. Tedy v $O(n^3)$ to určitě zvládneme.

-> Převod zachová splnitelnost:

Dk:

Stará splnitelná => nová splnitelná

$(z \vee l_1 \vee l_2)$ – pokud $l_1 \vee l_2$, $z = 0$

pak ale to $(\neg z \vee l_3 \dots)$ bude pravda.

Opačně bude nějaký l_i; $i > 2$ pravdivé, tudíž klauzule pravdivá, tudíž můžu nastavit $z = 1$.

Stará splnitelná <= nová splnitelná

Vynechám z. Pak $(z \vee l_1 \vee l_2)$ muselo být splněno pomocí $l_1 \vee l_2$. Jinak bylo splněno pomocí l_i $i > 2$. Tudíž to z můžu nastavit „nezávisle"

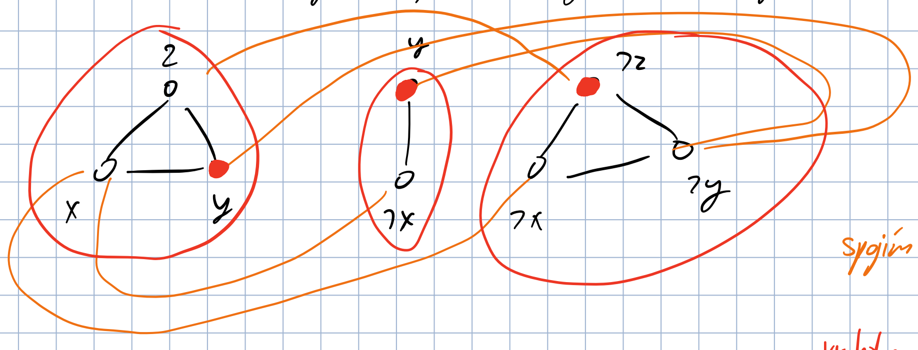
☒

3-SAT -> NzMna

„V grafu existuje NzMna vel. k, pokud je splněna formule o k klauzulích.

Mějme 3-SAT:

$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$



spojím opačné literály

vrcholy NzMny

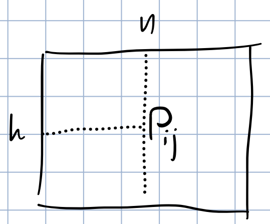
Formule je splnitelná <=> v G ∃ NzMna vel. alespoň k.

NzMnn $\to$ SAT: graf s vrcholy $1 - n$, proměnné $x_1 - x_n$ $(x_i = 1 \iff i \in$ NzMnn$)$

Triviální nastavení všech na nulu by splnilo ohodnocení.

L> klauzule $\neg(x_i \wedge x_j)$ pro $\{i,j\} \in E$

$\neg x_i \vee \neg x_j$



V každém řádku je právě jedna „1". Ve sloupci nejvýše jedna „1".

+ proměnné p_{ij} pro $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$

($p_{ij} \iff$ vrchol j je v pořadí i-tý v NzMnž)

ve sloupci max 1 $\to$ $p_{ij} \Rightarrow \neg p_{i'j}$ $\quad 1 \le i,i' \le k, \ 1 \le j \le n, \ i \ne i'$

v řádku max 1 $\to$ $p_{ij} \Rightarrow p_{ij'}$ —||— $j \ne j'$

v řádku alespoň 1 $\to$ $p_{i1} \vee p_{i2} \vee \dots p_{in}$

+ Celé propojím: $p_{ij} \Rightarrow x_j$ $\quad (\neg p_{ij} \vee x_j)$

Zamyšlení nad jednotlivými kroky dokazuje korektnost.

3-SAT $\to$ 3,3-SAT (3,3SAT $\to$ 3SAT je triviální, protože to je spec. případ 3-SATu).

Mějme proměnnou x s #výskytů $:= t > 3$.

L> nahradím novými proměnnými $x_1 - x_t$ (se stejným ohodnocením)

+ přidám klauzule:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \Rightarrow x_2 \\ x_2 \Rightarrow x_3 \\ \vdots \\ x_{t-1} \Rightarrow x_t \\ x_t \Rightarrow x_1 \end{array}\right\}$$

$\to$ každý literál se objevuje jen 2x.

Takhle nastavím všechny stejně.

3D-párování:

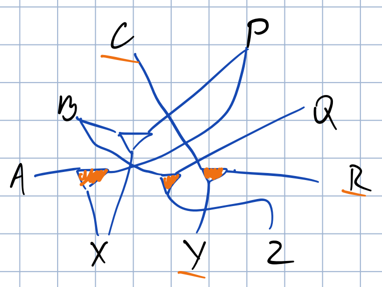
Vstup: množiny K, H, Z

množina $T \subseteq K \times H \times Z$

Výstup:

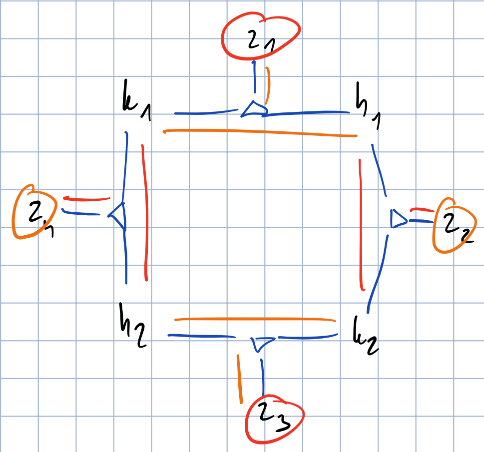
$1 \iff \exists T' \subseteq T : \forall_{p \in K,H,Z} \in! \ T'$.

$\to$ je v právě 1 trojici



3,3-SAT → 3D párování:

Gadget pro proměnnou:



Jakými způsoby lze párování provést?

$(L \wedge R) \vee (U \wedge D)$

● $= 0$ volná z_2, z_4

● $= 1$ volná z_1, z_3

\# zvířátek:

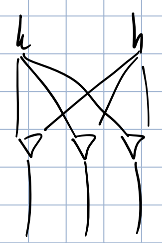
2 gadgety pro proměnnou:

2 # prom − # klauzulí

→ přidám tolik párů univerzálních držitelů zvířátek

Gadget pro klauzuli

$x \vee y \vee \neg t$



$z_1 \vee z_3$ pro x $\quad$ $z_1 \vee z_3$ pro y $\quad$ z_2, z_4 pro ¬t

To je 3,3-SAT.

Použiju vlastnost, že každý literál se objeví nejvýše $2x$, tedy budu mít vždy z čeho vybrat z_i, z_{i+2}

Df: P je třída všech problémů řešitelných v polyn. čase $L \in P \equiv \exists A$ alg. $\exists p$ polynom. t.ž. $\forall x \in \{0,1\}^*$ A doběhne do $p(|x|)$ kroků $\wedge$ $A(x) = L(x)$.

Df: NP je třída problémů t.ž. $L \in NP \equiv \exists V \in P$

$$\forall x \in \{0,1\}^* \; L(x) = 1 \iff \exists \overset{\text{certifikát}}{y} \in \{0,1\}^*: \; |y| = q(|x|) \wedge \underset{\text{verifikátor}}{V(x,y)} = 1$$