

Df: Síť se skládá z:

- 1) $G = (V, E)$ symetrický orientovaný graf
- 2) zdroj, stožek jsou určením různými vrcholky $z, s \in V, z \neq s$
- 3) $c := E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, což jsou kapacity hran

Df: Tok je $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ t.č.:

- 1) $\forall e \in E: f(e) \leq c(e)$
- 2) $\forall v \in V, v \neq z, s: f^\Delta(v) = 0$

Df: $f^+(v) := \sum_{uv \in E} f(uv)$ přítok

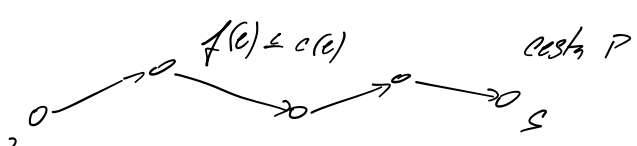
$f^-(v) := \sum_{vu \in E} f(vu)$ odtok

$f^\Delta(v) := f^+(v) - f^-(v)$ přebytek

Df: Velikost toku $|f| := f^\Delta(z)$

👁️ $f^\Delta(z) = -f^\Delta(s)$

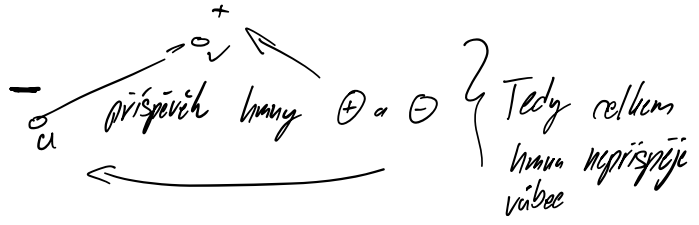
$\sum_v f^\Delta(v) = f^\Delta(z) + f^\Delta(s) = 0$



$\varepsilon := \min_{e \in P} c(e) - f(e)$

$\forall e \in P f(e) = f(e) + \varepsilon$

→ Ten ale nefunguje:



Df: rezervy hran $uv: r(uv) := c(uv) - f(uv) + f(vu)$
 po směru proti směru

Fordův-Fulkersonův alg:

- buď chodit i proti orientaci hran, jen v tom případě kůně 0 hodnotu toku směm její tok.

1) $f = 0$
 → $\forall e \in P: r(e) > 0$

e) Pokud $\exists P$ nenasycená cesta $z \rightarrow s$:

- 3) $\varepsilon := \min_{e \in P} r(e)$
- 4) $\forall uv \in P:$
- 5) $\delta = \min(\varepsilon, f(vu))$
- 6) $f(vu) = f(vu) - \delta$
- 7) $f(uv) = f(uv) + \varepsilon - \delta$

Ukončenost:

- 1) Pro celočíselní c : ANO
- 2) Pro racionální c : ANO
- 3) Pro iracionální c : NE

→ obecně!
 → Pokud by se ale prokázalo od největší nenasycené cesty, je počet iterací konečný. $O(n \cdot m)$

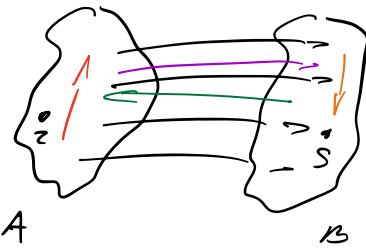
Certifikát maximálního toku:

Mějme el. řez mezi A, B , kde $z \in A, s \in B$. Pak $f(A, B) = \sum_{e \in E(A, B)} f(e)$

$$f^D(A, B) = f(A, B) - f(B, A)$$

☀ $f^D(A, B) = |f|$ pro jakýkoliv tok a řez.

Uvažme $\sum_{v \in B} f^D(v) = f^D(s) = |f|$



- | | |
|------------|--------------------|
| neprispěje | prispěje 2x/pomocí |
| neprispěje | prispěje 1x/dotek |
| neprispěje | neprispěje |
| neprispěje | neprispěje |

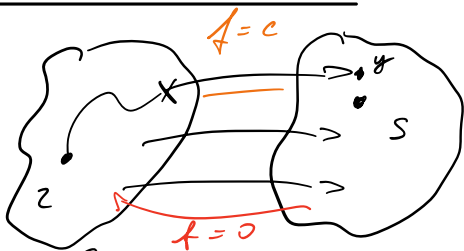
Tedy velikost toku lze měřit i kdekoliv na el. řezu

Lemán: $\forall f$ tok, $\forall E(A, B)$ řez: $|f| \leq c(A, B)$

$$|f| = f^D(A, B) = \underbrace{f(A, B)}_{\leq c(A, B)} - \underbrace{f(B, A)}_{\leq 0}$$

polohou f je max
 $E(A, B)$ je min

Síťovce po odstranění F-F



$$B := V \setminus A$$

$$|f| = c(A, B)$$

$$A := \{v \mid \exists \text{ cesta } z \text{ do } v \text{ po nenasycených}\}$$

Def: Párování v grafu (V, E) :

je $F \subseteq E$ t.č. $\forall e, f \in F: e \cap f = \emptyset$

Největší číselný tok f

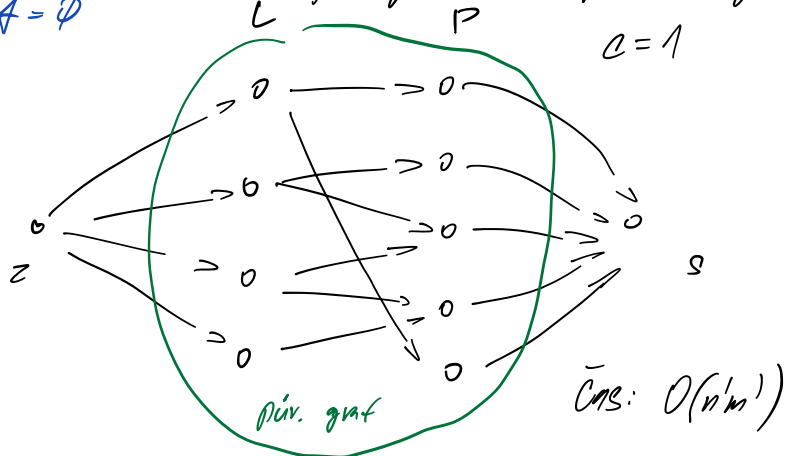
Párování bude odpovídat
maximální pív. grafu s $f=1$

! bijekce mezi toky a párováním
zachovávající velikost !

\Rightarrow Maximální tok \approx největšímu párování $n' = n+2$
 $m' = m+n$

$$O(n'm') = O((n+2)(m+n)) = O(nm)$$

Úkol: Největší párování v bipartitním grafu



V: Pokud $\forall e \in E: c(e) \in \{0, 1\}$, pak $F \subseteq E$ je dobřena v čase $O(nm)$.

Počít iterací je $O(n)$, jeden krok trvá $O(m)$

\hookrightarrow Více než n kroků nemůže být ze zdroje.

Def: Čistý tok f^* k toku $f: f^*(uv) := f(uv) - f(vu)$

- ☺ 1) $f^*(uv) = -f^*(vu)$
- 2) $-c(vu) \leq f^*(uv) \leq c(uv)$
- 3) $\forall v \neq z, s: f^\Delta(v) = 0$
pří $f^\Delta(v) := \sum_{uv \in E} f^*(uv)$

Lemma: $\forall g$ splňující ①②③ $\exists f$ tok, že $g = f^*$

BÚV: zvolíme uv libovolně, $g(uv) \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(uv) &:= g(uv) \\ f(vu) &:= 0 \end{aligned} \right\} f \subseteq c$$

☺ $r(uv) = c(uv) - f^*(uv)$