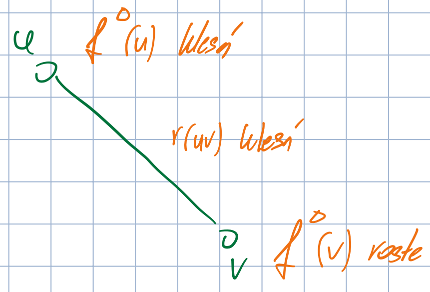
**Df:** Vlna $f: E \to \mathbb{R}^{0}$

1) $f \leq c$
2) $\forall v \neq s,z: f^\Delta(v) \geq 0$

**Df:** Výšky: $h: V \to \mathbb{N}$

**Df:** Převedení z u do v:

1) $f^\Delta(u) > 0$
2) $r(uv) > 0$
3) $h(u) > h(v)$




**Df:** Spád $uv = h(u) - h(v)$

## Goldbergův algoritmus

1) $\forall v: h(v) = 0$, $h(z) = n$ — Inicializace
2) $\forall e: f(e) = 0$ — Vytvoření první vlny
   $\forall zv \in E: f(zv) = c(zv)$
3) Dokud $\exists u \neq z,s$, $f^\Delta(u) > 0$
4) Pokud $\exists uv: r(uv) > 0, h(u) > h(v)$
5) Převedeme po uv.
6) Jinak:
7) $h(u) = h(u) + 1$

Vždycky se zastaví a $f$ bude maximální tok

→ Očividně by bylo vhodné vybrat vždy vrchol, který je nejvýš a obsahuje největší přebytek

---

## Invarianty a lemma o alg.

**Inv. A:** $f$ je vždy vlna

**Inv B:** Výška nikdy neklesá

**Inv C:** $h(z) = n$, $h(s) = 0$

**Inv D:** $\forall v \neq z: f^\Delta(v) \geq 0$

**Inv. S:** Pokud $r(uv) > 0$, pak $h(u) - h(v) \leq 1$.

**Inv F:** $\forall v: h(v) \leq 2n$

Já ale zvedám, pokud nemůžu převést přebytek. Tudíž by $\exists$ nenasycená cesta z výšky $2n$ do výšky $n$, tedy se spádem $n$, což je počet vrcholů. Tudíž víc by byl spor s Inv. S.

## Lemma K: Když se alg. zastaví, $f$ je maximální tok.

Dk: 1) že je to tok. 2) že je maximální

1) Vlna odvádí přebytky ve všech vrcholech, dle alg. Tzn., dokud přebytky existují ve vrcholech $\neq z, s$. Tudíž to na konci bude tok.

2) Kdyby $f$ nebylo maximální, $\exists$ nenasycená cesta ze $z$ do $s$.

Každá hrana může klesnout jen o 1. Tudíž pomocí $n-1$ hran neklesnu o $n$.

↳ Tahle cesta překonává výšku $n$, cestou má $n-1$ vrcholů.

↳ Jedna hrana (nenasycená) by musela mít spád $> 1$ ↯

## Lemma 2: # zvednutí $\leq 2n^2$

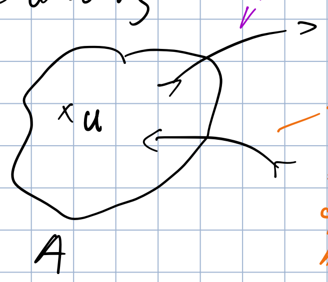
1 vrchol nejvíc $2n$ krát (Inv F), tudíž všechny $2n^2$.

**Inv E:** Pokud $f^{\Delta}(u) > 0$ pro $u \neq z, s$, pak $\exists$ nenasycená cesta z $u$ do $z$.

Důkaz Inv E:

Mějme $f^{\Delta}(u) > 0$, $A := \{ v \mid \exists \text{ nenasycená cesta z } u \text{ do } v \}$

$$\sum_{v \in A} f^{\Delta}(v) \leq 0$$




jediné příspěvky můžou být nekladné, kde to odtéká.

tyhle nemůžou existovat, protože by existovala opačná nenasycená hrana, tudíž by to byl spor s definicí množiny

↳ $\exists v \in A: f^{\Delta}(v) < 0$

↳ To je ale zdroj!

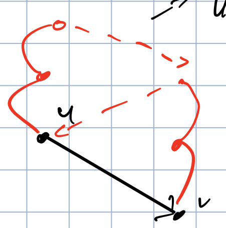
Takže $v$ je zdroj. Tudíž $z \in A$.

## Lemma S: (nasycená převedení)

Celkový # převedení $\leq mn$.

Ukážeme $uv$:

- probíhá zde nejvíc $n$ převedení.



$\nearrow$ Ukážeme, že nyní je syté převedeno.
Tedy $r(uv) = 0$.

$\hookrightarrow$ Pak se musí převést z $v$ do $u$.
Tedy $h(v) > h(u)$.

$\hookrightarrow$ Pak abychom mohli znovu převést, i $u$ musí zvýšit o 2.

Výška je však omezena na $2n$. Tudíž může být převedeno jen $n$ krát.
Jelikož mezi každým převedením se musí zvednout o 2.

**Df:** Převedení po hraně $uv$

- nasycené: $= r(uv)$ klesne na 0.
- nenasycené: $\dashrightarrow f^{\Delta}(u)$ klesne na 0.

## Lemma NS: (nenasycená převedení)

Za celou dobu výpočtu, # nenasycených převedení je $O(n^2 m)$.

**Dk:** Potenciál $\displaystyle \Phi := \sum_{\substack{v \neq z,s \\ f^{\Delta}(v) > 0}} h(v)$.

1) $\Phi \geq 0$ $\dashrightarrow$ výška nikdy není záporná
2) $\Phi$ na začátku je 0.
3) Po zvednutí $\Delta\Phi = 1$
4) Zvednutí je nejvýš $2n^2$. Tudíž celkem $\Delta\Phi\ 2n^2$
5) Syté převedení: Za jedno syté převedení $\dashrightarrow \Delta\Phi \leq 2n$
   Za všechny tudíž $\Delta\Phi \leq 2n^2 m$

   Já jsem jen mohl jeden vrchol maximálně zvednout

6) Nenasycené převedení:
   $\Delta\Phi \leq -1$

   A jelikož $\Phi \geq 0$, tak těchto potenciálových změn bude max $O(n^2 m)$

## Implementace:

$S :=$ seznam $\forall v \neq z,s : f^{\Delta}(v) > 0$ → hledání vrcholů s nenulovým přebytkem

$\forall v : \; H(v) :=$ seznam $vw \in E : r(vw) > 0 \;\&\; h(v) - h(w) \geq 1$ → seznam pro hrany po které převést

## Časová složitost

**Věta:** Alg. běží v čase $O(n^2 m)$.

- výběr vrcholu a hrany $= O(1)$
- převedení $= O(1)$ $\quad O(mn) + O(n^2 m)$
- zvednutí $= O(n)$ $\quad O(n^3)$ → což je ale furt $O(n^2 m)$.

**Lemma:** V Goldbergovi s výběrem nejvyššího vrcholu je # nenasycených převedení $O(n^3)$.

**Dk:** $H := \max\{h(v) \mid f^{\Delta}_{v \neq z,s}(v) > 0\}$

Rozdělme běh alg. na fáze, fáze končí při změně $H$.

↳ Buď zvýšení/snížení o 1.

↳ Zvýšení může nastat jen $O(n^2)$ → snížení může být nejvýš stejně.

↳ Fází tedy je celkem $O(n^2)$.

Stačí ukázat # nenasycených převedení / 1 fázi $\leq n$.

- jakmile vynulujeme přebytek, tak v dané fázi se již k tomu vrcholu nevrátím. Tudíž každý vrchol nejvýš 1.