Df: Vlna $f: E \to \mathbb{R}_0$

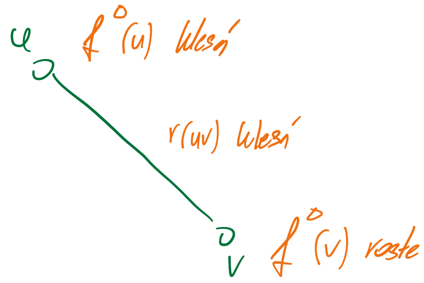
1) $f \leq c$
2) $\forall v \neq s,z : f^{\circ}(v) \geq 0$

Df: Spád $uv = h(u) - h(v)$

Df: Výšky: $h: V \to \mathbb{N}$

Df: Převedení z u do v:

1) $f^{\circ}(u) > 0$
2) $r(uv) > 0$
3) $h(u) > h(v)$



Goldbergův algoritmus

1) $\forall v : h(v) = 0,\ h(z) = n$ — Inicializace
2) $\forall e : f(e) = 0$ — Vytvoření první vlny
   $\forall zv \in E : f(zv) = c(zv)$
3) Dokud $\exists u \neq z,s,\ f^{\circ}(u) > 0$
4) Pokud $\exists uv : r(uv) > 0,\ h(u) > h(v)$
5) Převedeme po uv.
6) Jinak:
7) $h(u) = h(u) + 1$

Vždycky se zastaví a f bude maximální tok

Očividně by bylo vhodné vybírat vždy vrchol, který je nejvýš a obsahuje největší přebytek

Invarianty a lemma o alg.

Inv. A: f je vždy vlna

Inv B: Výška nikdy neklesá

Inv C: $h(z) = n,\ h(s) = 0$

Inv D: $\forall v \neq z : f^{\circ}(v) \geq 0$

Inv. S: Pokud $r(uv) > 0$, pak $h(u) - h(v) \leq 1$.

Inv F: $\forall v : h(v) \leq 2n$

Já ale zvedám, pokud nemůžu převést přebytek. Tudíž by $\exists$ nenasycená cesta z výšky $2n$ do výšky n, tedy se spádem n, což je počet vrcholů. Tudíž víc by byl spor s Inv. S.

Lemma K: Když se alg. zastaví, f je maximální tok.

Dk: 1) že je to tok. 2) že je maximální

1) Vlna dovoluje přebytky ve všech vrcholech, ale alg. běží, dokud přebytky existují ve vrcholech $\neq z, s$. Tudíž to na konci bude tok.

2) Kdyby f nebylo maximální, $\exists$ nenasycená cesta ze z do s.

Každá hrana může klesnout jen o 1. Tudíž pomocí $n-1$ hran neklesnu o n.

↳ Taková cesta překonává výšku n, cestou má $n-1$ vrcholů.

↳ Jedna hrana (nenasycená) by musela mít spád > 1 ↯

Lemma 2: $\#$ zvednutí $\leq 2n^2$

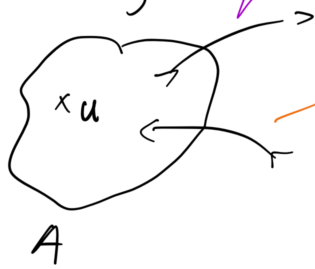
1 vrchol nejvíc $2n$ krát (Inv F), tudíž všechny $2n^2$.

Inv E: Pokud $f^\Delta(u) > 0$ pro $u \neq z, s$, pak $\exists$ nenasycená cesta z u do z.

Důkaz Inv E:

Mějme $f^\Delta(u) > 0$, $A := \{v \mid \exists \text{ nenasycená cesta z } u \text{ do } v\}$

$$\sum_{v \in A} f^\Delta(v) \leq 0$$



jediné příspěvky můžou být záporné, kde to odtéká.

↳ takové nemůžou existovat, protože by existovala opačná nenasycená hrana, tudíž by to byl spor s definicí množiny

↳ $\exists v \in A$: $f^\Delta(v) < 0$

↳ To je ale zdroj!

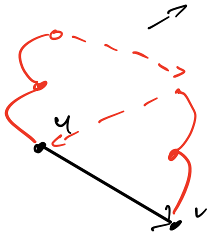
Takže v je zdroj. Tudíž $z \in A$.

Lemma S: (nasycené převedení)

Celkový # převedení $\le mn$.

Uvažme uv:

- podíváme se nejvíc n převedení:



↗ uvažme, že nyní je sytě převedena. Tedy $r(uv) = 0$.

↳ Pak se musí převést z v do u. Tedy $h(v) > h(u)$.

↳ Pak abychom mohli znovu převést, i u musí zvýšit o 2.

Výška je však omezena na $2n$. Tudíž může být převedena jen n krát.
Jelikož mezi každým převedením se musí zvednout o 2.

Df: Převedení po hraně uv

- nasycené $= r(uv)$ klesne na 0.
- nenasycené $\to f^{\Delta}(u)$ klesne na 0.

Lemma NS: (nenasycené převedení)

Za celou dobu výpočtu, # nenasycených převedení je $O(n^2 m)$.

Dk: Potenciál $\Phi := \sum_{\substack{v \neq z,s \\ f^{\Delta}(v) > 0}} h(v)$.

1) $\Phi \ge 0$ → výška nikdy není záporná
2) Φ na začátku je 0.
3) Po zvednutí $\Delta\Phi = 1$
4) Zvednutí je nejvýš $2n^2$. Tudíž celkem $\Delta\Phi\ 2n^2$
5) Syté převedení: za jedno syté převedení → $\Delta\Phi \le 2n$

   Za všechny tudíž $\Delta\Phi \le 2n^2 m$

   Já jsem jen mohl jeden vrchol maximálně zvednout

6) Nenasycené převedení: $\Delta\Phi \le -1$

   A jelikož $\Phi \ge 0$, tak těchto potenciálových změn bude max $O(n^2 m)$

Implementace:

$S :=$ seznam $\forall v \neq z,s : f^{D}(v) > 0$ —> hledání vrcholů s nejvyšším přebytkem

$\forall v : \quad H(v) :=$ seznam $vw \in E : r(vw) > 0$ & $h(v) - h(w) \geq 1$ —> seznam pro hrany po které převést

Časová složitost

Věta: Alg. běží v čase $O(n^2 m)$.

- výběr vrcholu a hrany $= O(1)$
- převedení $= O(1)$ $\quad O(mn) + O(n^2 m)$
- zvednutí $= O(n)$ $\quad O(n^3)$ —> což je ale furt $O(n^2 m)$.

Lemma: V Goldbergovi s výběrem nejvyššího vrcholu je # nenasycených převedení $O(n^3)$.

Dk: $H := \max \{ h(v) \mid f^{D}_{v \neq z,s}(v) > 0 \}$

Rozdělíme běh alg. na fáze, fáze končí při změně H.

↳ Buď zvýšení/snížení o 1.

↳ Zvýšení může nastat jen $O(n^2)$ —> snížení může být nejvýš stejně.

↳ Fází tedy je celkem $O(n^2)$.

Stačí ukázat # nenasycených převedení / fáze $\leq n$.

- jakmile vynuluju přebytek, tak v dané fázi se již k tomu vrcholu nevrátím. Tudíž každý vrchol nejvýš 1.