Df: Polynom : $P(x) := \sum_{j=0}^{n-1} p_j \cdot x^j$

↳ $(p_0 \dots p_{n-1})$

n = velikost polynomu

normalizace → $p_{n-1} \neq 0 \Rightarrow deg(P) = n$

$deg(P) := \max_j : p_j \neq 0$

→ nulový polynom má $deg(P) = -1$

Násobení polynomů:

$$P(x) \cdot Q(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1} q_k x^k\right) = \sum_{j,k} p_j q_k \overbrace{x^j x^k}^{x^{j+k}} = \sum_{t=0}^{m+n-2} \left(\sum_{j=0}^{t} p_j q_{t-j}\right) \cdot x^t$$

$$deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$$

↳ $O(n \cdot m)$ kvadratické!

Rovnost polynomů:

- identicky rovny : pokud po normalizaci jsou koeficienty stejné $\Leftrightarrow$
- reálně rovny : $\forall x : Q(x) = P(x)$

Lemma: Nechť P, Q polynomy stupně $\leq d$. $x_0 \dots x_d$ navzájem různá.

$$\left(\forall_j \; P(x_j) = Q(x_j)\right) \Rightarrow (P = Q)$$

Lemma: Nechť P, $deg(P) \geq 0$. Potom $\exists$ nejvýše d čísel α : $P(\alpha) = 0$. → kořeny!

$$R \overset{\to\, deg \leq d}{\equiv} P - Q$$

$$R(x_j) = P(x_j) - Q(x_j) = 0$$

$\Downarrow$ → musí být nulový

$R \equiv 0$

$P = Q$

Polynom velikosti n

$\Downarrow$

$deg < n$

$(p_0 \dots p_{n-1})$

$\Updownarrow$ pokud zadám $(x_0 \dots x_{n-1})$ navzájem různé

→ ten polynom je jednoznačně určen

$(P(x_0), \dots, P(x_{n-1}))$

Plán:

1) Doplníme k P, Q nulové koeficienty, aby horních $n/2$ koeficientů bylo 0.] $O(n)$
2) Zvolíme $x_0 \dots x_{n-1}$
3) Sestrojíme grafy $(P(x_0), \dots, P(x_{n-1}))$, $(Q(x_0), \dots, Q(x_{n-1}))$] $O(n^2)$
4) $(R(x_0), \dots, R(x_{n-1}))$: $R(x_j) = P(x_j) \cdot Q(x_j)$] $O(n)$ ↳ Pak součin je jen po složkách
5) Nalezneme koeficienty R] $O(n^2)$ ~ Lagrange → pomalé!

Idea: Rozděl a panuj: BÚNO $n = 2^k$

$x_0 \quad\quad x_{\frac{n}{2}-1}$	$x_{n/2} \quad\quad x_{n-1}$

$x_j = -x_{n/2+j}$

Chceme vyhodnotit $P(x) = \sum_j p_j x^j$

v bodech x_0 — x_{n-1}

$$P(x) = \underbrace{p_0 x^0 + p_2 x^2 + \dots \, p_{n-2} x^{n-2}}_{S(x^2)} \quad \text{stupeň } n/2$$

$$+ \underbrace{p_1 x^1 + p_3 x^3 + \dots \, p_{n-1} x^{n-1}}_{x \cdot L(x^2)}$$

stále ale v n bodech

vyhodnocení P, vel. n, bodů n $\longrightarrow$ vyhodnocení L, S, vel. $n/2$, bodů $n/2$

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = O(n \log n)$$

Pak: $P(x_j) = S(x_j^2) + x_j \cdot L(x_j^2)$

$P(-x_j) = S(x_j^2) - x_j L(x_j^2)$ $\longrightarrow$ hodnota v druhé půlce je $(-1)\cdot$ násobek. Tudíž stačí spočítat jen 1 půlku, druhou víme

Tohle ale nefunguje pro $\mathbb{R}$, protože $x^2 \geq 0$,

tudíž nemůže existovat párování $x_j^2 = -x_{n/2+j}^2$.

Pro $\mathbb{C}$ to však funguje!

$\mathbb{C}$ čísla:

$\to x = a + bi$ $\qquad \to \sqrt{a^2+b^2}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \quad x = |x| \cdot e^{i\varphi(x)}$

$\to$ odpovídá směru vektoru, následně vynásobenému jeho velikostí

Speciálně pro $|x| = 1$: $\quad x = e^{i\varphi(x)}$

$\hookrightarrow \forall x \in \mathbb{C}: |x| = 1: \quad x = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \quad x^{\alpha} = |x|^{\alpha} \cdot e^{i\varphi(x)\cdot\alpha}$

Speciálně pro $|x| = 1$ $\quad x^{\alpha} = e^{i\varphi(x)\alpha}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \quad \sqrt[n]{x} = |x|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\varphi(x)\cdot\frac{1}{n}}$

Speciálně pro $|x| = 1$ $\quad \sqrt[n]{x} = e^{i\varphi(x)\frac{1}{n}}$

N-tých odmocnin z 1 (nad $\mathbb{C}$) je vždy n.

$\to$ všechny odmocniny lze napsat jako $e^{i\varphi}$.

$\to$ n-té umocnění vynásobí argument n-krát, ten ale musí být 0, pokud jde o jedničky.

$\hookrightarrow \varphi \cdot n = 0 \pmod{2\pi}$

$\hookrightarrow$ alternativně hledáme (nad $\mathbb{C}$) kořeny $x^n = 1$

$\hookrightarrow$ polynom stupně d má nejvíce d kořenů.

$\to \varphi \cdot n = 0 \pmod{2\pi} \implies \varphi \cdot n = 2k\pi \implies \varphi = \frac{2k\pi}{n}$

$\to$ dostáváme pro $k = 0 \ldots n-1$ různé úhly, pak se to začne opakovat.