Df: Polynom : $P(x) := \sum_{j=0}^{n-1} p_j \cdot x^j$ $\hookrightarrow (p_0 \ldots p_{n-1})$

$n =$ velikost polynomu

normalizace $\to$ $p_{n-1} \neq 0 \implies deg(P) = n$

$deg(P) := \max_j : p_j \neq 0$ $\to$ nulový polynom má $deg(P) = -1$

Násobení polynomů:

$$P(x) \cdot Q(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1} q_k x^k\right) = \sum_{j,k} p_j q_k \underline{x^j x^k} = \sum_{t=0}^{m+n-2} \left(\sum_{j=0}^{t} p_j q_{t-j}\right) \cdot x^t$$

x^{j+k}

$$deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$$

$\hookrightarrow O(n \cdot m)$ kvadratické!

Rovnost polynomů:

- identicky rovny : pokud po normalizaci jsou koeficienty stejné $\Leftarrow \Rightarrow$
- reálně rovny : $\forall x : Q(x) = P(x)$

Lemma: Nechť P, Q polynomy stupně $\leq d$. $x_0 \ldots x_d$ navzájem různé.

$$\left(\forall_j\ P(x_j) = Q(x_j)\right) \implies (P = Q)$$

Lemma: Nechť P, $deg(P) \geq 0$. Potom $\exists$ nejvýše d čísel α : $P(\alpha) = 0$. $\to$ kořeny!

$$R \equiv P - Q \quad (\to deg \leq d)$$

$$R(x_j) = \underbrace{P(x_j) - Q(x_j)}_{=0}$$

$\Downarrow$

$R \equiv 0$ $\to$ musí být nulový

$P = Q$

Polynom velikosti n

$\Downarrow$

$deg < n$

$(p_0 \ldots p_{n-1})$ $\swarrow$ pokud zvolím $(x_0 \ldots x_{n-1})$ navzájem různé

$(P(x_0), \ldots, P(x_{n-1}))$ $\to$ ten polynom je jednoznačně určen.

Plán:

1) Doplníme k P, Q nulové koeficienty, aby horních $n/2$ koeficientů byly 0. $\Big]\ O(n)$
2) Zvolíme $x_0 \ldots x_{n-1}$
3) Sestrojíme grafy $\begin{matrix}(P(x_0), \ldots, P(x_{n-1})) \\ (Q(x_0), \ldots, Q(x_{n-1}))\end{matrix} \Big]\ O(n^2)$
4) $(R(x_0), \ldots, R(x_{n-1}))$: $R(x_j) = P(x_j) \cdot Q(x_j)$ $\Big]\ O(n)$ $\hookrightarrow$ pak součin jde jen po složkách
5) Nalezneme koeficienty R $\Big]\ O(n^2)$ $\sim$ Lagrange $\to$ pomalé!

Idea: Rozděl a panuj: BÚNO $n=2^k$

x_0 \ \ \ \ $x_{\frac{n}{2}-1}$	$x_{n/2}$ \ \ \ \ x_{n-1}

$x_j = -x_{n/2+j}$

Chceme vyhodnotit $P(x) = \sum_j p_j x^j$

v bodech x_0 — x_{n-1}

$$P(x) = \underbrace{p_0 x^0 + p_2 x^2 + \dots p_{n-2} x^{n-2}}_{} \quad S(x^2) \rightarrow \text{stupeň } n/2$$

$$+ \underbrace{p_1 x^1 + p_3 x^3 + \dots p_{n-1} x^{n-1}}_{} \quad x \cdot L(x^2)$$

→ stále ale v n bodech

Pak: $P(x_j) = S(x_j^2) + x_j \cdot L(x_j^2)$

$P(-x_j) = S(x_j^2) - x_j L(x_j^2)$ → hodnota v druhé půlce je $(-1)\cdot$ násobek. Tudíž stačí spočítat jen 1 půlku, druhou víme

vyhodnocení P, vel. n, bodů n → vyhodnocení L, S, vel. $n/2$ bodů $n/2$

$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = O(n \log n)$

Tohle ale nefunguje pro $\mathbb{R}$, protože $x^2 \geq 0$,
tudíž nemůže existovat párování $x_j^2 = -x_{n/2+j}^2$.
Pro $\mathbb{C}$ to však funguje!

$\mathbb{C}$ čísla:

$x = a + bi$ $\quad$ $\sqrt{a^2+b^2}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \; x = |x| \cdot e^{i\varphi(x)}$ $\quad$ → odpovídá směru vektoru, následně vynásobenému jeho velikostí

Speciálně pro $|x| = 1$: $x = e^{i\varphi(x)}$

↳ $\forall x \in \mathbb{C}: |x| = 1: \; x = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \; x^\alpha = |x|^\alpha \cdot e^{i\varphi(x)\cdot\alpha}$

Speciálně pro $|x| = 1$ $\quad x^\alpha = e^{i\varphi(x)\alpha}$

$\forall x \in \mathbb{C}: \; \sqrt[n]{x} = |x|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\varphi(x)\cdot\frac{1}{n}}$

Speciálně pro $|x| = 1$ $\quad \sqrt[n]{x} = e^{i\varphi(x)\frac{1}{n}}$

N-tých odmocnin z 1 (nad $\mathbb{C}$) je vždy n.

→ všechny odmocniny lze napsat jako $e^{i\varphi}$.

→ n-té umocnění vynásobí argument n-krát, ten ale musí být 0, pokud jde o jedničky.

↳ $\varphi \cdot n = 0 \pmod{2\pi}$

↳ alternativně hledáme (nad $\mathbb{C}$) kořeny $x^n = 1$

↳ polynom stupně d má nejvíce d kořenů.

→ $\varphi \cdot n = 0 \pmod{2\pi} \implies \varphi \cdot n = 2k\pi \implies \varphi = \frac{2k\pi}{n}$

→ dostáváme pro $k = 0 \ldots n-1$ různé úhly, pak se to začne opakovat.