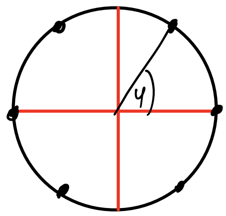
Komplexní n-té odmocniny z 1.



$e^{\frac{2\pi i \cdot k}{n}}$

pro $k = 0 \dots n-1$

Df: Číslo w:

primitivní n-tá odmocnina z 1 $\iff$

$w^n = 1$ & $w^1, \dots, w^{n-1} \neq 1$

$\underbrace{e^{\frac{2\pi i}{n}}}_{w}$ je primitivní, $\underbrace{e^{-\frac{2\pi i}{n}}}_{w^{-1} = \overline{w}}$ také.

Vlastnosti:

1) $w^0 \dots w^{n-1}$ jsou navzájem různé.

Kdyby $w^j = w^k$: $0 \le j < k < n$, pak $1 = \frac{w^k}{w^j} = w^{k-j}$ $0 \le k-j < 0$

→ to ale z definice nejde

2) Pokud n sudé, pak $w^{n/2} = -1$

$(w^{n/2})^2 = w^n = 1$ → druhá odmocnina z 1 v $\mathbb{C}$, tedy $\langle {+1 \atop -1}$

→ také to z definice nemůže být

Záchrana min. alg:

volíme $\vec{x} = (w^0, \dots, w^{n-1})$

$w^{n/2+j} = \underbrace{w^{n/2}}_{-1} \cdot w^j$, tedy to bude správně spárované

$(w^j)^2 = w^{2j} = (w^2)^j$ → w^2 je primitivní $\sqrt[n/2]{1}$

FFT

Vstup: $n = 2^k$, w primitivní $\sqrt[n]{1}$, $(p_0 \dots p_{n-1})$ koef. polynomu

Výstup: $(y_0 \dots y_{n-1})$ t.ž. $y_j = P(w^j)$

→ $\Theta(n \log n)$

Alg:

1) Pokud $n=1$: vrátíme $y_0 = p_0$
2) $(s_0 \dots s_{n/2-1}) = FFT(n/2, w^2, (p_0, p_2, \dots, p_{n-2}))$

   $(l_0 \dots l_{n/2-1}) = FFT(n/2, w^2, (p_1, p_3, \dots, p_{n-1}))$
3) Pro $j = 0 \dots n/2-1$:

   $y_j = s_j + w^j \cdot l_j$

   $y_{n/2+j} = s_j - w^j \cdot l_j$

Df: Diskrétní Fourierova Transformace (DFT) je $\mathcal{F}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ t.ž.

$\vec{x} \to \vec{y}$, kde $\forall j: \underline{y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_j \cdot \omega^{jk}}$, přičemž ω je pevně zvolená prim. $\sqrt[n]{1}$

— tohle je lin. kombinace.

$$\mathcal{F}(p_0 \dots p_{n-1}) = (P(\omega^0), \dots, P(\omega^{n-1}))$$

maticový součin

Tudíž $\mathcal{F}(\vec{x}) = \Omega \cdot \vec{x}$, kde $\Omega_{jk} = \omega^{jk}$

Hledání inverzu:

$$(\Omega \cdot \overline{\Omega})_{jk} = \sum_t \underbrace{\Omega_{jt}}_{\omega^{jt}} \cdot \underbrace{\overline{\Omega_{tk}}}_{\overline{\omega^{tk}} = \overline{\omega}^{tk} = \omega^{-tk}} = \sum_t (\omega^{j-k})^t$$

$\omega^{jt} \cdot \omega^{-tk} = \omega^{t \cdot (j-k)}$

$q^k = \frac{q^k - 1}{q - 1}$

$j = k$: $\sum_t 1^t = n$

$j \neq k$, $q \neq 1$: $\frac{(\omega^{j-k})^n - 1}{\omega^{j-k} - 1} = \frac{0}{\neq 0} = \underline{0}$

$\to (\omega^n)^{j-k}$ $\quad \omega^n = 1$

$\to 0 < j-k < n$, díky primitivnosti $\neq 0$.

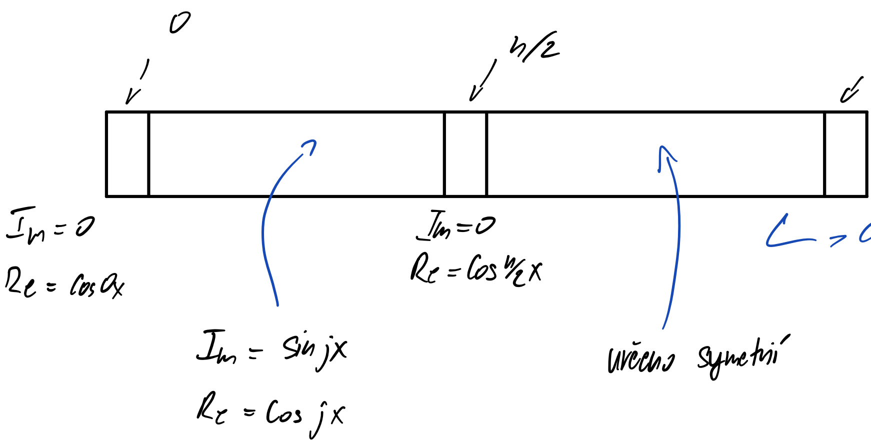
$$\Omega \cdot \overline{\Omega} = \begin{pmatrix} n & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots \, 0 & n \end{pmatrix}$$

Důsledek

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \overline{\Omega}$$

$\mathcal{F}_\omega^{-1}$ spočítáme jako $\frac{\mathcal{F}_\omega}{n}$

Tudíž i inverzi umíme v $O(n \log n)$



$\leftarrow$ celá druhá půlka je symetrická vůči první

Věta: Fourierův obraz je symetrický.

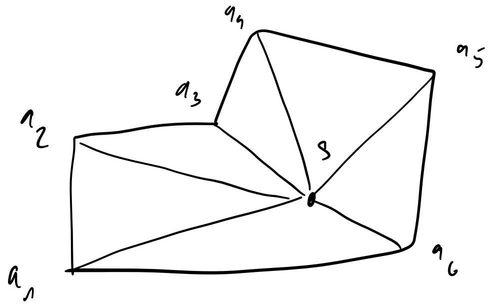
$\omega^{-j} = \omega^{-j} \cdot 1 = \omega^{-j} \cdot \omega^n = \omega^{n-j}$

$= x_k \qquad \omega^{-jk} = (\omega^{-j})^k = (\omega^{n-j})^k$

$$\overline{y_j} = \overline{\sum_k x_k \omega^{jk}} = \sum_k \overline{x_k} \cdot \overline{\omega}^{jk} = \underline{\sum_k x_k \cdot (\omega^{n-j})^k} = y_{n-j}$$

To je ale přesně $n-j$-tý Fourierův koeficient. Tedy platí symetrie.

$$\begin{vmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & a_x & a_y \\ 1 & b_x & b_y \\ 1 & c_x & c_y \end{vmatrix} = 2 \cdot S(\triangle abc)$$

Budiž to fakt.