

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

11. prosince 2019

- (předchozí DÚ) Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že
 - $T^* \models x = y \rightarrow y = x$ (symetrie =)
 - $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ (tranzitivita =)

Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

- Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol \leq a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model \mathcal{A} s nekonečným klesajícím řetězcem, tj. v \mathcal{A} existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

$$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

(Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

- Převeďte následující formule do prenexního tvaru.
 - $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
 - $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
 - $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$
- K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.
- Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte
 - $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$
- Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.

- $x + (-x) = 0$
 - $x + (-y) < x$
 - $-(x + y) < -x$
- Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ , který není otevřený:

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

- Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .
 - Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S . Je $T' \models \varphi$?
 - Lze každý model teorie T jednoznačně expandovat na model teorie T' ?
- Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.
 - Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?

- (b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ .
- (c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?
- (d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L .

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.
- (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.
 - (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.
10. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejspnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly a, b .
- (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$
 - (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$
 - (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
 - (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$
11. Převed'te následující formule na ekvivalentní formule v množinové reprezentaci.
- (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
 - (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
 - (c) $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$
 - (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

Poznámka

DÚ: příklad 8 (za 1b, toto je poslední DÚ). Druhý test se bude psát na cvičení 8. ledna.

Ekvivalentnost \rightarrow není to ekvivalentní formule, ale její splnitelnosti jsou (např.: pro tabul) shodné.

3. Převedte následující formule do prenexního tvaru.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$

$$\begin{aligned}
 & (\forall y) \left((\exists x) P(x, y) \rightarrow Q(y, z) \right) \wedge (\exists y') (\forall x'') (R(x'', y') \vee Q(x, y')) \\
 & \quad \left((\exists y') (\forall y) (\forall x') (P(x', y) \rightarrow Q(x, z)) \wedge (\forall x'') (R(x'', y') \vee Q(x, y')) \right) \\
 & \quad \forall x \forall x'' (\exists y') (\forall y) (\forall x') (\forall x'') \left((P(x', y) \rightarrow Q(x, z)) \wedge (R(x'', y') \vee Q(x, y')) \right)
 \end{aligned}$$

Toto je prenexní tvar

Tohle si představuj. Svědek $(\exists y')$ může být jiný pro různé volby volných proměnných.
 Generální užitím

$$\begin{aligned}
 & (\forall x) \alpha(x) \wedge (\forall x) \beta(x) \\
 & (\forall x) (\alpha(x) \wedge \beta(x)) \quad \text{OKE} \\
 & \underline{(\forall x) (\alpha(x) \wedge \beta(x))} \quad \text{NOU} \\
 & (\forall x) (\forall x') (\alpha(x) \wedge \beta(x')) \quad \text{OKE}
 \end{aligned}$$

Skolemizace

$$y' = f(z, x) \quad \forall z \forall x \forall y \forall x' \forall x'' \left((P(x', y) \rightarrow Q(x, z)) \wedge (R(x'', f(z, x)) \vee Q(x, f(z, x))) \right)$$

(b) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$

$$((\exists x)(R(x, y)) \rightarrow (\forall y)(P(x, y))) \wedge ((\forall y)(P(x, y)) \rightarrow (\exists x)(R(x, y)))$$

$$(\neg(\exists x)(R(x, y)) \vee (\forall y)(P(x, y))) \wedge (\neg(\forall y)(P(x, y)) \vee (\exists x)(R(x, y)))$$

volně

Prenexní tvar

$$\forall x \forall y (\forall x') (\forall y') (\exists y'') (\exists x'') \left((\neg R(x', y) \vee P(x, y')) \wedge (\neg P(x, y'') \vee R(x'', y)) \right)$$

Generální užitím

$$\begin{aligned}
 y'' & := f(x, y, x', y') \\
 x'' & := g(x, y, x', y')
 \end{aligned}$$

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' \left((\neg R(x', y) \vee P(x, y')) \wedge (\neg P(x, f(x, y, x', y'))) \vee R(g(x, y, x', y'), y) \right)$$

Skolemizace

6. Necht' T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

→ Musím použít axiomy z T teorie

Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.

- (a) $x + (-x) = 0$
- (b) $x + (-y) < x$
- (c) $-(x + y) < -x$

$$(\exists z)(x + z = 0 \wedge x + z = 0)$$

$$-x = z$$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

- (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.
- (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

→ Univerzum zahrne všechny termy

Herbrandovo univerzum:

$a, f(a), f(f(a)) \dots f^n(a)$
 $b, \dots \dots \dots f^n(b)$
 $P(a), P(b), P(f(a)), \dots$
 $Q(,) \rightarrow$ všechny sh. součin