

## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 12

18. prosince 2019

1. Teorie těles  $T$  jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  má mezi axiomy jediný axiom  $\varphi$ , který není otevřený:

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že  $T \models 0 \cdot y = 0$  a  $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$ .

- (a) Nalezněte Skolemovu variantu  $\varphi_S$  formule  $\varphi$  s novým funkčním symbolem  $f$ .  
(b) Nechť  $T'$  je teorie vzniklá z  $T$  nahrazením  $\varphi$  za  $\varphi_S$ . Je  $T' \models \varphi$ ?  
(c) Lze každý model teorie  $T$  jednoznačně expandovat na model teorie  $T'$ ?  
2. (předchozí DÚ) Nechť  $T$  je předchozí teorie. Označme  $\psi$  formuli  $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$ .  
(a) Platí v  $T$  podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli  $\psi(x, y)$  a proměnnou  $y$ ?  
(b) Sestrojte extenzi  $T^*$  teorie  $T$  o definovaný symbol  $f$  formulí  $\psi$ .  
(c) Je  $T^*$  ekvivalentní teorii  $T'$  z přechodního příkladu?  
(d) K následující formulí nalezněte v  $T^*$  ekvivalentní formulí původního jazyka  $L$ .

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

3. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.  
(a)  $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$ , kde  $P, Q$  jsou unární resp. binární relační,  $f$  je unární funkční,  $a, b$  jsou konstantní symboly.  
(b)  $L = \langle P, f, g, a \rangle$ , kde  $P$  je binární relační,  $f, g$  jsou unární funkční,  $a$  je konstantní.  
4. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejspitelnou konjunkci základních instancí jejich axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly  $a, b$ .  
(a)  $T = \{ \neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a) \}$   
(b)  $T = \{ \neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a) \}$   
(c)  $T = \{ P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)) \}$   
(d)  $T = \{ P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y) \}$   
5. Převeďte následující formule na ekvivalentní formule v množinové reprezentaci.  
(a)  $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$   
(b)  $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$   
(c)  $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$   
(d)  $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$   
6. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, že nejsou unifikovatelné.  
(a)  $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$   
(b)  $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$   
(c)  $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$   
(d)  $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$   
7. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících dvojic klauzulí.  
(a)  $\{P(x, y), P(y, z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

- (b)  $\{P(x, x), \neg R(x, f(x))\}, \{R(x, y), Q(y, z)\}$
- (c)  $\{P(x, y), \neg P(x, x), Q(x, f(x), z)\}, \{\neg Q(f(x), x, z), P(x, z)\}$

8. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

- (a)  $\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}$
- (b)  $\{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}$
- (c)  $\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}$
- (d)  $\{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}$
- (e)  $\{\neg H(v, a)\}$

9. Nalezněte (konečnou) nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z předchozího příkladu.

10. Víme, že

- (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.
- (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.
- (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

11. Víme, že

- (a) Každý holič holí každého, kdo se neholí sám.
- (b) Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že žádný holič neexistuje.

### Poznámka

DÚ není zadán. Druhý test se bude psát na posledním cvičení 8.1.

6. Pomocí unifikčního algoritmu naleznete nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, že nejsou unifikovatelné.

- (a)  $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
- (b)  $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
- (c)  $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
- (d)  $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

a) 1)  $\{x / f(y)\} \rightarrow \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$   
 2)  $\{y / f(z)\} \rightarrow \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$   
 3)  $\{z / f(a)\} \rightarrow \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$

molekli jsme tedy, že formule jsou po unifikaci stejné

b)  $\{x / a\}, \{y / a\} \rightarrow \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(a, f(a), g(a))\}$

není jaká unifikace

7. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících dvojic klauzulí.

- (a)  $\{P(x, y), P(y, z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

1)  $\sigma^1 = \{x / u\}, \{y / f(u)\} \rightarrow \{P(u, f(u)), P(f(u), z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$   
 $\{P(f(u), z)\} \sigma^1$

2)  $\sigma^2 = \{y / u\}, \{z / f(u)\} \rightarrow \{P(x, u), P(u, f(u))\}, \{\neg P(u, f(u))\}$   
 $\{P(x, u)\} \sigma^2$

To jsou všechny rezolventy.