Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 6

6. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Předpokládejme, že máme k dispozici MgO, H_2, O_2, C a lze provést reakce:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & MgO + H_2 \;\rightarrow\; Mg + H_2O \\
(2) & C + O_2 \;\rightarrow\; CO_2 \\
(3) & CO_2 + H_2O \;\rightarrow\; H_2CO_3
\end{array}
$$

   (a) Reprezentujte naše možnosti výrokem a převeďte ho do množinové reprezentace.
   (b) Pomocí LI-rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3.

2. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \to \neg q, \neg q \to \neg r, (r \to p) \to s\}$ platí s, tj. $T \models s$.

3. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ následující vztahy.
   (a) $\vdash_H \varphi \to \varphi$
   (b) $T \vdash_H \varphi \to \chi$ pro $T = \{\varphi \to \psi,\ \psi \to \chi\}$
   (c) $T \vdash_H \psi \to \chi$ pro $T = \{\varphi,\ \psi \to (\varphi \to \chi)\}$

4. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.
   (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$ Volný: z, Vázaný: y
   (b) $\underline{(\exists x)(P(x)} \wedge \underline{(\forall x)Q(x))} \vee \underline{(x = 0)}$ vázaný, volný, žádný výskyt
   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

5. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
   substituce pouze do volných proměnných
   (a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
   (b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,
   (c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,

6. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
   (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$ (X/z) X Poslední „z" bylo původně nevázané
   (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$ X „y" bylo volné, nyní je vázaný
   (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$ ✓ vázané a volné byly dodrženy

7. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \rhd^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v $\mathcal{A}$.
   (a) $x \rhd y$ X Znamenalo by $(\forall x)(\forall y)\, x \rhd y$, my ale nemáme zde všechny dvojice
   (b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$ X $((\forall y)\, y \not\rhd a, (\forall y)\, y \not\rhd b, (\forall y)\, y \not\rhd c, (\forall y)\, y \not\rhd d)$
   (c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$

8. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

9. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
   ✓(a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$ Všechny modely (kde platí pro všechna dosazení) ⊨ Všechny ohodnocení
   X(b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$ x je volné v φ — φ neplatí ∀e ✓ F -> ? = T; φ platí ∀e
   ✓(c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$ výběr konkrétního ohodnocení
   (d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$

platí pro všechny

Pozn.

Příští týden 13.11. se bude psát první test. Domácí úkol nebyl zadán.

Volné proměnné nelze přejmenovat!

Je rozdíl mezi přejmenováním a substitucí!

Substituce:

$\varphi(x)(x/t)$ lze pokud:

x je volné

Pokud t nemá vázaný výskyt tam, kde bylo x.

Tedy aby na substitučních místech zůstane t volné.

Přejmenování:

Nesmím přejmenovat na již existující proměnnou

Musí získat sémantický význam výskytů

Přejmenování: → všechny vázané

$$\frac{\forall(x)\, Q(x)}{\forall(y)\,\big(Q(x)(x/y)\big)}$$

tedy jsou nyní x volné, za ně dosadím

$(\forall x)\,\varphi(x) \to (\exists x)\,\varphi(x)$ Neplatí, pokud je nosičem modelu x prázdná.

$A \not\models \varphi \to A \models \neg\varphi$

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 7

13. listopadu 2019

1. Test 1
2. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
   (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
   (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
   (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
   (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$
3. Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
   (b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
   (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
   (d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
   (e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$
4. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,
   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
   (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?
5. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.
   (a) $x + y = y + x$
   (b) $x + y = x \ \rightarrow \ y = 0$
   (c) $x + y = 0 \ \rightarrow \ y = -x$
   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

Domácí úkol

Libovolné tři příklady z 3.(b)-(e), včetně zdůvodnění (1 bod celkem).