

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 6

6. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Předpokládejme, že máme k dispozici MgO, H₂, O₂, C a lze provést reakce:

- (1) $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$
- (2) $C + O_2 \rightarrow CO_2$
- (3) $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

- (a) Reprezentujte naše možnosti výrokem a převed'te ho do množinové reprezentace.
- (b) Pomocí LI-rezoluce dokažte, že můžeme získat H₂CO₃.

2. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí s , tj. $T \models s$.

3. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ následující vztahy.

- (a) $\vdash_H \varphi \rightarrow \varphi$
- (b) $T \vdash_H \varphi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\}$
- (c) $T \vdash_H \psi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi, \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\}$

4. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převed'te na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$ *Volný: z, Vázaní: y*
- (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$ *vázaný, volný, žádný výskyt*
- (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

5. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?

- (a) term z za proměnnou x , term y za proměnnou x , *Substituce pouze do volných proměnných*
- (b) term z za proměnnou y , term $2 * y$ za proměnnou y ,
- (c) term x za proměnnou z , term y za proměnnou z ,

6. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

- (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$ *(x/z) x Poslední „z“ bylo původně vázané*
- (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$ *x „y“ bylo volné, nyní je vázané*
- (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$ *✓ vázané a volné byly dohromady*

7. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \triangleright^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem \triangleright , kde $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$. Určete, zda jsou následující formule pravdivé v \mathcal{A} .

- (a) $x \triangleright y$ *x* *Imunita by $(\forall x)(\forall y) x \triangleright y$, my ale máme zde všechny dvojice*
- (b) $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$ *x* *$(\forall y) y \triangleright a, (\forall y) y \triangleright b, (\forall y) y \triangleright c, (\forall y) y \triangleright d$*
- (c) $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
- (e) $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

8. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu \mathcal{B} (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

9. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí

- ✓ (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$ *všechny modely (které platí pro všechny domény) \models všechny domény*
- ✗ (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$ *x je volné v φ*
- ✓ (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$ *φ neplatí ve $\mathcal{F} \rightarrow ? = \mathcal{T}$*
- ✓ (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$ *φ platí ve*

platí pro všechny

všech konkrétních doménách

Pozn.

Příští týden 13.11. se bude psát první test. Domácí úkol nebyl zadán.

Volné proměnné nelze přejmenovávat!

Je rozdíl mezi přejmenováním a substitucí!

Substituce:

$\mathcal{Q}(x)(x/t)$ kde podmínka:

x je volné

Podmínka t nemá vázaný výskyt

tam, kde bylo x .

Tedy aby na substitučních místech

zůstane t volné.

Přejmenování:

Nesmíme přejmenovat na již existující proměnnou

Musí zůstat sémanticky významný výskyt

$(\forall x) \mathcal{Q}(x) \rightarrow (\exists x) \mathcal{P}(x)$ Neplatí, pokud je množin modelů x prázdná.

$$A \models \forall \rightarrow A \models \neg \mathcal{Q}$$

Přejmenování: \rightarrow všechny vázané

$\mathcal{P}(x) \mathcal{Q}(x)$

$\mathcal{P}(y) (\mathcal{Q}(x)(x/y))$

tedy jsou nyní x volné, a y vázané

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 7

13. listopadu 2019

1. Test 1
2. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
 - (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
 - (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
 - (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
 - (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$
3. Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
 - (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
 - (b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
 - (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x)))$
 - (d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
 - (e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$
4. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu \mathcal{A} , formuli φ , sentenci ψ ,
 - (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
 - (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
 - (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
 - (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ , ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ , ve které x není volná?

5. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x + y) + z \\0 + x &= x = x + 0 \\x + (-x) &= 0 = (-x) + x\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T .

- (a) $x + y = y + x$
- (b) $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

Domácí úkol

Libovolné tři příklady z 3.(b)-(e), včetně zdůvodnění (1 bod celkem).