Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 8

20. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
   (b) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
   (c) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
   (d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

2. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,
   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
   (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?

3. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.
   (a) $x + y = y + x$ nezávislé
   (b) $x + y = x \;\to\; y = 0$ pravdivé
   (c) $x + y = 0 \;\to\; y = -x$ pravdivé
   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

   $0 = -y+y = -y+0+y = -y+((-x)+x)+y$
   $=(-y)+(-x)+(x+y) \;/ + \; -(x+y)$
   $-(x+y) = (-y)+(-x)$

4. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0 \rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a \rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$. ↓
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ i jiné podstruktury? Ne
   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup? Ano ↓
   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy komutativní grupou? ANO.

   Všechna tvrzení, co platí v jednom modelu, platí ve druhém

   $x+y = y+x$ je otevřený axiom, takže by to nezkazil.

5. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
   (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model teorie grup?
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

toto musí být ve vzájemném kontextu

$x + y = x$

$x + 0 = x$

$y = 0$ to není správný důkaz

$x + y = x \quad / \ (-x) + .$

$(-x) + x + y = (-x) + x$

$0 + y = 0$

$y = 0$

Zde jsem y uvedl do kontextu.

③

$L = \langle +_2 \rangle$

Takto lze dodefinovat 0.

$\varphi_0(x) = (\forall y)\ y + x = y$

definice záporného prvku

$\varphi_-(x, i) = x + i = 2 \wedge i + x = 2 \wedge$ (0) (0) není ale zavedeno.

$(\forall y)\ y + 2 = y \wedge 2 + y = y$

④

b)

$Z_4 \langle \emptyset \rangle = \{0\}$ – je to validní podstruktura

$Z_4 \langle 0 \rangle = \{0\}$ – uzavřenost a značí konstanta

$Z_4 \langle 1 \rangle = Z_4$ – dostanu součtem vše

$Z_4 \langle 2 \rangle = \{2, 0\}$ – inverz 2 je 2, nula je konstanta a 2 tam máme ze zadání

$Z_4 \langle 3 \rangle = Z_4$

Generovali jsme podstruktury, nikoliv podgrupy

Neověřovali jsme axiomy

$+$ zúžení na x.

$+ \langle x \rangle = + \restriction (x \cup c)$ pokud tam jsou i konstanty

d) – lze ověřit axiomy na podstrukturách

– tato teorie je ale otevřená $\Rightarrow$ každá podstruktura je (pod)modelem

Tím pádem všechny jsou podgrupy.

(Např.: tělesa nejsou otevřená)

b) Je tam podstruktura celých čísel, ale nemám inverzní prvek k násobení a nevytvořím zlomky.

$\frac{1}{2} = x$

$x + x = 1$

$x \cdot 2 = 1$

$x \cdot (1+1) = 1$

$Q\langle \frac{1}{2} \rangle$

mám tam všechny $\mathbb{Z}$

mám tam násobky $\frac{1}{2}$

např.: $\frac{1}{3}$ tam není (přestože to je hezká podmnožina)

$Q\langle \frac{1}{2} \rangle$, $Q\langle \frac{1}{3} \rangle$ jsou tedy různé

$Q\langle \frac{1}{12} \rangle$ by dostalo to stejné jako předtím, násobky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$

$R\langle Q \cup \sqrt{2} \rangle$ — pak prvky jsou jako $a + b\sqrt{2}$ (skoro jako $\mathbb{C}$)

Tablo

F $P(a) \to \exists x\, P(x)$

T $P(a)$ ✓

F $(\exists x) P(x)$

F $P(a)$

⊗

a je konstanta (uzavřený), tudíž sentence

T$(\forall x)P(x)$ → podle atomických tabel můžu vybrat cokoliv

T$(\forall x)P(x)$ $\{a, b, c\}$

T $P(a)$

tohle tam musíme nechat, protože můžu příště vybrat i více prvků.

6. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

   (a) Je T (sémanticky) bezesporná?

   (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?

   (c) Určete všechny její jednoduché kompletní extenze (až na ekvivalenci).

   (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí? Je teorie $T^* = T \cup T'$ konzervativní extenzí teorie T?

7. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, \mathit{Filmy}, \mathit{Program}, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', ...$\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku

   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,

   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,

   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,

   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Konstanty

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	...	...	...

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	...	...	...

8. Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:

   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,

   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

Domácí úkol

Příklad 6 (1 bod).

$2: \quad g(x) = x = 1+1$

$\frac{1}{2}: \quad y(x) = x + x = 1$

to ale definuje $\pm\sqrt{2}$. Chceme jen $+$.

$\sqrt{2}: \quad y(x) = x \cdot x = 1+1 \;\wedge\; (\exists y)\, y \cdot y = x \qquad 0 \le x$

$0: \quad g(x) = (\forall y)\, x \cdot y = x$

8b $y((x,y)) = x \cdot y = 1$, potřebujeme dodefinovat 1: $y^1(x) = (\forall x)\ x \cdot y = y$