## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 8

20. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
   (b) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
   (c) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$
   (d) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

2. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli $\varphi$, sentenci $\psi$,
   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
   (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli $\psi$, ve které $x$ je volná proměnná? A pro formuli $\psi$, ve které $x$ není volná?

3. Uvažme teorii $T$ (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, $0$ konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v $T$.
   (a) $x + y = y + x$ nezávislé
   (b) $x + y = x \;\to\; y = 0$ pravdivé
   (c) $x + y = 0 \;\to\; y = -x$ pravdivé
   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

   $0 = -y + y = -y + 0 + y = -y + ((-x) + x) + y$
   $= (-y) + (-x) + (x + y) \;/ + \; -(x+y)$
   $-(x+y) = (-y) + (-x)$

4. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0 \rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a \rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$. ↓
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ i jiné podstruktury? Ne
   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup? Ano ↓
   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy komutativní grupou? ANO.

   Všechna tvrzení, co platí v jednom modelu, platí ve druhém

   x+y = y+x je otevřený axiom, takže by to nezkazil.

5. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
   (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model teorie grup?
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

③

toto musí být ve vnějšném kontextu

$x+y=x$

$x+0=x$

$y=0$ to není správný důkaz

$x+y=x \;/\; (-x)+.$

$(-x)+x+y=(-x)+x$

$0+y=0$

$\underbrace{y=0}$

zde jsem $y$ uvedl do kontextu.

$L=\langle +_2 \rangle$ ← Takto lze dodefinovat 0.

$\underline{\varphi_0}(x) = (\forall y)\ y+x=y$

definice záporného prvku → $\varphi_-(x,i) = x+i=\overset{(0)}{2} \wedge i+x=\overset{(0)}{2} \wedge$ není ale zavedena.

$(\forall y)\ y+z=y \wedge z+y=y$

④

b) $Z_4\langle\emptyset\rangle=\{0\}$ – je to validní podstruktura

$Z_4\langle 0\rangle=\{0\}$ – uzavřenost a záměr konstanta

$Z_4\langle 1\rangle=Z_4$ – dostanu součtem vše

$Z_4\langle 2\rangle=\{2,0\}$ – inverz 2 je 2, nula je konstanta a 2 tam máme ze zadání

$Z_4\langle 3\rangle=Z_4$

Generovali jsme podstruktury, nikoliv podgrupy

Neověřovali jsme axiomy

$+\langle x\rangle = + \upharpoonright (x\cup c)$ ← + zúžené na x. pokud tam jsou i konstanty

d) - lze ověřit axiomy na podstrukturách

- tato teorie je ale otevřená => každá podstruktura je (pod)modelem

Tím pádem všechno jsou podgrupy.

(Např.: tělesa nejsou otevřená)

b) Je tam podstruktura celých čísel, ale nemám inverzní prvek k násobení a nevytvořím zlomky.

$\frac{1}{2} = x$

$x + x = 1$

$x \cdot 2 = 1$

$x \cdot (1+1) = 1$

$Q\langle \frac{1}{2} \rangle$

mám tam všechny $\mathbb{Z}$

mám tam násobky $\frac{1}{2}$

např.: $\frac{1}{3}$ tam není (přestože to je kratší podmnožina)

$Q\langle \frac{1}{2} \rangle$, $Q\langle \frac{1}{3} \rangle$ jsou tedy různé

$Q\langle \frac{1}{12} \rangle$ by dostalo to stejné jako předtím, násobky $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$

$R\langle Q \cup \sqrt{2} \rangle$ — pak prvky jsou jako $a + b\sqrt{2}$ (skoro jako $\mathbb{C}$)

## Tablo

F $P(a) \rightarrow \exists x\, P(x)$

T $P(a)$ ✓

F $(\exists x) P(x)$ ⟶ podle atomických tabel můžu vybrat cokoliv

F $P(a)$

⊗

a je konstanta (uzavřená) tudíž sentence

$T(\forall x)P(x)$

$T(\forall x)P(x)$ $\{a, b, c\}$

T $P(a)$

tohle tam musíme nechat, protože můžu příště vybrat i více prvků.

6. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \lor x = c_2 \lor x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.
   (a) Je $T$ (sémanticky) bezesporná?
   (b) Jsou všechny modely $T$ elementárně ekvivalentní? Tj. je $T$ (sémanticky) kompletní?
   (c) Určete všechny její jednoduché kompletní extenze (až na ekvivalenci).
   (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \lor x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ extenzí $T$? Je $T'$ jednoduchou extenzí? Je $T'$ konzervativní extenzí? Je teorie $T^* = T \cup T'$ konzervativní extenzí teorie $T$?

7. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, Filmy, Program, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', ...$\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku
   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,
   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,
   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,
   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Konstanty

| *Filmy* | *název* | *režisér* | *herec* |
|---|---|---|---|
| | Lidé z Maringotek | M. Frič | J. Tříska |
| | Po strništi bos | J. Svěrák | Z. Svěrák |
| | Po strništi bos | J. Svěrák | J. Tříska |
| | ... | ... | ... |

| *Program* | *kino* | *název* | *čas* |
|---|---|---|---|
| | Světozor | Po strništi bos | 13:15 |
| | Mat | Po strništi bos | 16:15 |
| | Mat | Lidé z Maringotek | 18:30 |
| | ... | ... | ... |

8. Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde $F$ je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

**Domácí úkol**

Příklad 6 (1 bod).

$2: \quad \varphi(x) = x = 1+1$

$\frac{1}{2}: \quad \varphi(x) = x + x = 1$

to ale definuje $\pm\sqrt{2}$. Chceme jen $+$.

$\sqrt{2}: \quad \varphi(x) = x \cdot x = 1+1 \quad \land \ (\exists y)\, y \cdot y = x \qquad 0 \le x$

$0: \quad \varphi(x) = (\forall y)\, x \cdot y = x$

8b $\mathcal{Y}((x,y)) = x \cdot y = 1$ , potrebujeme dodefinovat 1: $\mathcal{Y}'(x) = (\forall x)\ x \cdot y = y$