Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 10

4. prosince 2019

1. (předchozí DÚ) Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

2. Víme, že
   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

3. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z x do y"*. Víme, že
   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,
   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

4. Nechť φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x, značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.
   (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
   (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
   (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (e) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \to (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,
   (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,
   (i) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ,
   (j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ.

5. Nechť φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ. Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.
   (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,
   (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,
   (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,
   (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \to (\forall z)\psi) \to (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \to \psi(z/w))$.

6. Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \;\rightarrow\; y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\rightarrow\; x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

7. Nechť L je jazyk obsahující binární relační symbol E a konstantní symboly a, b a T je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž mezi vrcholy a a b existuje konečná cesta. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má i model, ve kterém mezi vrcholy a, b neexistuje konečná cesta.

8. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

$$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

Domácí úkol

Příklad 6. (1 b).

$\to$ musí být sentence pro tablo

$(\exists x)(\forall y) P(x,y) \to (\forall y)(\exists x) P(x,y)$

$T \exists$ – svědek

$T \forall$ – všichni } můžu dosadit lib. term

$F \exists$ – všichni

$F \forall$ – svědek

$F (\exists x)(\forall y) P(x,y)$ ✓

$\downarrow$

$T (\exists x)(\forall y) P(x,y)$ ✓

$F (\forall y)(\exists x) P(x,y)$ ✓

$\downarrow$

$T (\forall y) P(a_x, y)$ x/a_x

$F (\exists x) P(x, b_y)$ y/b_y

$\downarrow$

$T (a_x, a_x)$ tohle vám ale nepomůže

$\boxed{T} (a_x, b_y)$

$\boxed{F} (a_x, b_y)$

$\downarrow$

$\otimes$

2. Víme, že

   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

Potřebujeme jazyk:

x … osoba

$L(x)$ … lže

$V(x)$ … je vinný

$S(x)$ … je svědek

$O(x)$ … obviněný

a) $(\forall x)(V(x) \rightarrow L(x))$

b) $(\exists x)(O(x) \wedge S(x))$

c) $(\forall x)(S(x) \rightarrow \neg L(x))$

Tvrzení: T^2 $\neg(\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))$

$\{A, B, C\} \vdash_T T^2$ …. $\{A, B, C, \neg T^2\} \not\vdash_T \bot$

$F\ \neg(\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))$

* $T\ (\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))$ ← ¬ typu všichni, tedy počkáme na výběr

B: $T\ (\exists x)(O(x) \wedge S(x))$ ✓

$T\ O(a) \wedge S(a)$ $\quad x/a$

$T\ O(a)$

$T\ S(a)$

* $T\ (O(a) \rightarrow V(a))$ $\quad x/a$

$F\ O(a)$ | $\otimes$

$T\ V(a)$

A: $T(\forall x)(V(x) \rightarrow L(x))$ $\quad x/a$

$T\ (V(a) \rightarrow L(a))$

$F\ V(a)$ | $\otimes$

$T\ L(a)$

C: $T(\forall x)(S(x) \rightarrow L(x))$

$T(S(a) \rightarrow \neg L(a))$ $\quad x/a$

$F\ S(a)$ | $\otimes$

$T\ \neg L(a)$

$F\ L(a)$ | $\otimes$

Všude spor, tudíž je to korektní tablo důkaz a $\{A, B, C\} \vdash_T T^2$

Reprezentace bin. stromu:

$\emptyset$

$s(l, x, r)$

$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \to f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \to (R(x_1, y_1) \Leftrightarrow R(x_2, y_2))$

6

(a) $T^* \models x = y \ \to \ y = x$

tady je $(\forall x)(\forall y)$

rovnost: $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \to (x_1 = y_1 \to x_2 = y_2)$

$\{x_1/x,\ x_2/y,\ y_1/x,\ y_2/x\}$ → tady můžu explicitně dosadit

„Tablo" metodou

$x = y \wedge x = x \to (x = x \to y = x)$

4b

$(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x),$

$F(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$