Tablo-metoda

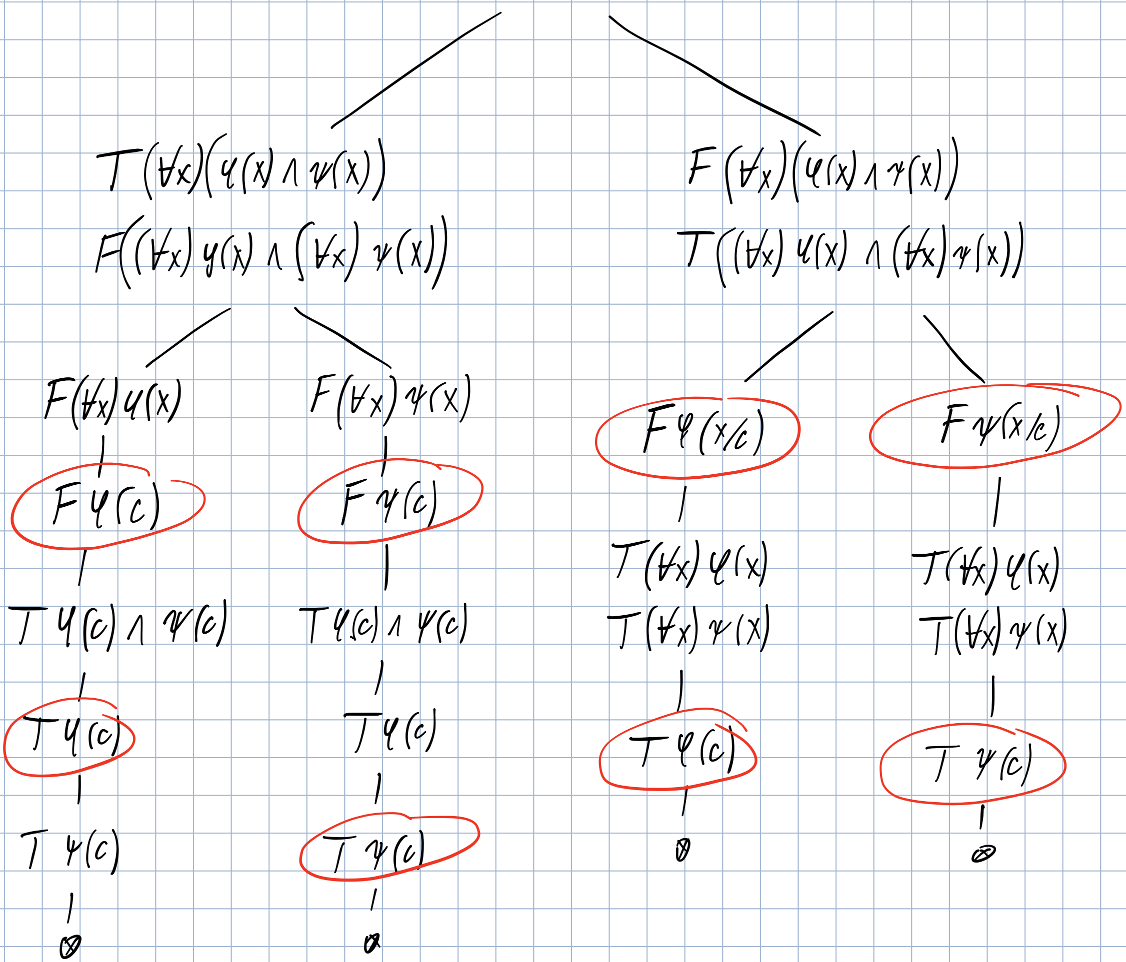
Tablo-důkaz: sporný tablo s F kořenem (nebyl nalezen protipříklad)

Tablo-zamítnutí: sporný tablo s T kořenem

Formule budou sentence --> uzavřené formule bez volných proměnných

↳ pokud nejsou, udělej uzávěr

$$F(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$$



$T \vdash \varphi$

Prenexní tvar

- všechny kvantifikátory musí být před formulí

↳ shody se tedy musí ekvivalentně přejmenovat

Musí být zachováno pořadí kvantifikátorů daných formulí: $(\forall x)((\exists y)\varphi \vee \psi) \sim (\forall x)(\exists y)(\varphi \vee \psi)$

$(\exists y)(\forall x)(\varphi \vee \psi)$

nelze!

Základní pravidla pro vytýkání jsou:

$$\neg(Qx)\varphi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi$$

$$((Qx)\varphi \wedge \psi) \sim (Qx)(\varphi \wedge \psi)$$

$$((Qx)\varphi \vee \psi) \sim (Qx)(\varphi \vee \psi)$$

$$((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \rightarrow (Qx)\psi) \sim (Qx)(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \land (\exists y)((\forall x)R(x,y) \lor Q(x,y))$$

$$(\forall y)((\exists x')P(x',y) \rightarrow Q(y,z)) \land (\exists y')((\forall x'')R(x'',y') \lor Q(x,y'))$$

$$(\forall y)(\forall x')(P(x',y) \rightarrow Q(y,z)) \land (\exists y')(\forall x'')(R(x'',y') \lor Q(x,y'))$$

→ generální uzávěr

$$\forall x \forall z\, (\exists y')(\forall y)(\forall x')(\forall x'')((P(x',y) \rightarrow Q(y,z)) \land (R(x'',y') \lor Q(x,y')))$$

Skolemizace

Převedení veškerých existenčních kvantifikátorů na funkci předchozích (myšleno v prenexním tvaru) všeobecných kvantifikátorů.

Pozor, platí to i na kvantifikátory generálního uzávěru

$$y' = f(x,z) \;\Big|\; \forall x \forall z \forall y \forall x' \forall x''((P(x',y) \rightarrow Q(y,z)) \land (R(x'',f(x,z)) \lor Q(x,f(x,z)))).$$

Rezoluční metoda

Vyžaduje skolemizaci (tedy i prenexní tvar), rezoluční rozhodnutí formule φ je $\vdash_R \neg\varphi$.

$$\varphi: (\exists y)(P(x,y) \land R(y)) \rightarrow ((\exists y)P(x,y) \land (\exists y)R(y))$$

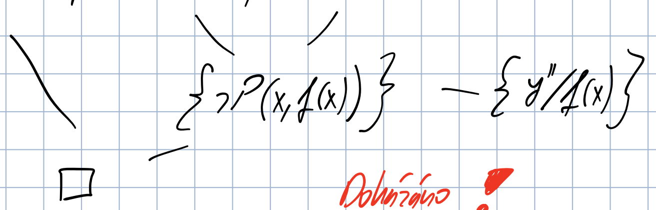
$$\neg\varphi: (\exists y)(P(x,y) \land R(y)) \land \neg((\exists y)P(x,y) \land (\exists y)R(y))$$

$$(\exists y')(P(x,y') \land R(y')) \land ((\forall y'')\neg P(x,y'') \lor (\forall y''')\neg R(y'''))$$

$$(\forall x)(\exists y')(\forall y'')(\forall y''')\, P(x,y') \land R(y') \land (\neg P(x,y'') \lor \neg R(y''')) \quad \text{– prenexní tvar}$$

$$y' = f(x) \;\Big|\; \forall x \forall y'' \forall y'''\, P(x,f(x)) \land R(f(x)) \land (\neg P(x,y'') \lor \neg R(y'')) \quad \rightarrow \text{skolemova varianta}$$

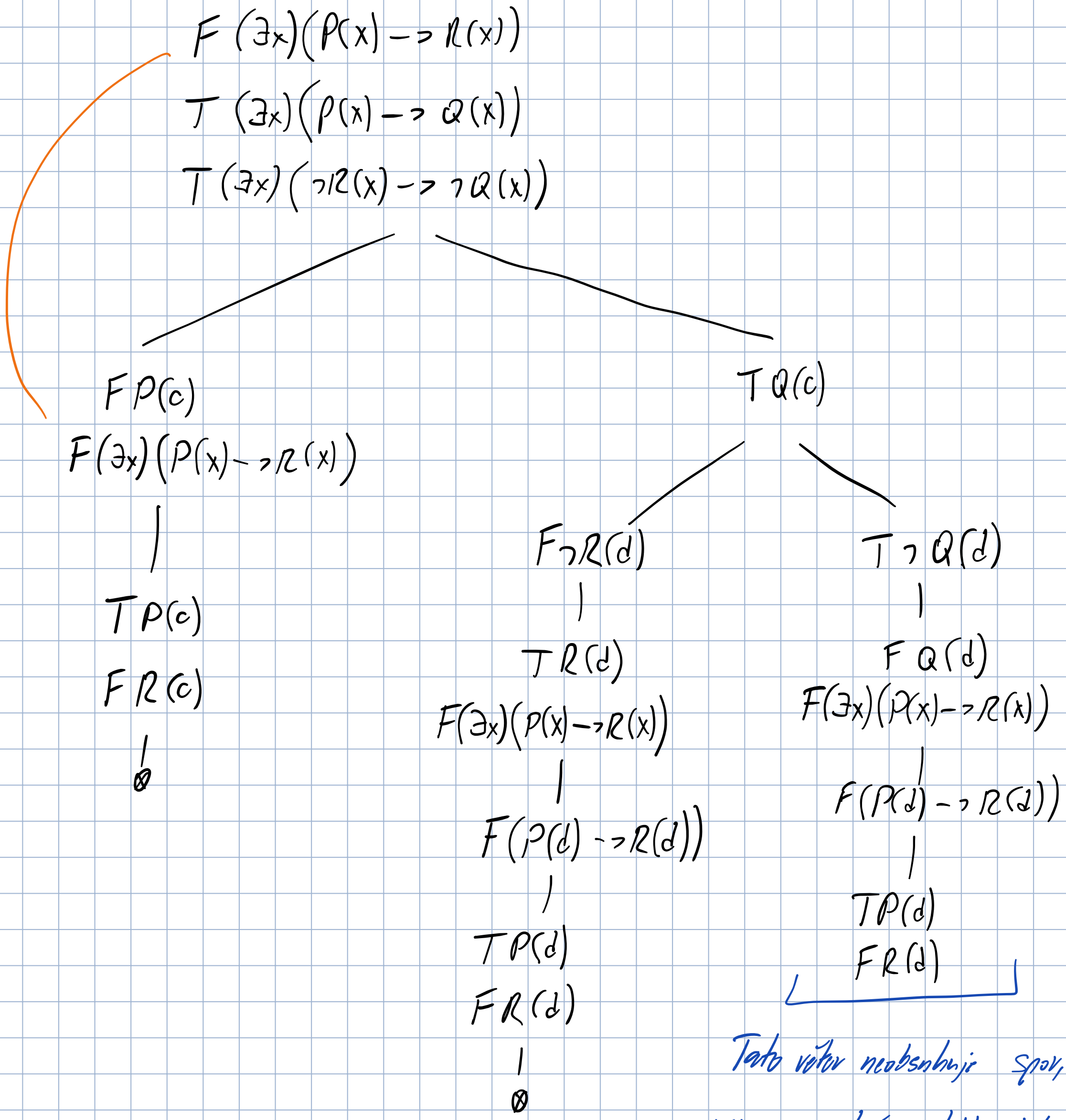
$$\{P(x,f(x))\},\ \{R(f(x))\},\ \{\neg P(x,y''),\ \neg R(y'')\}$$



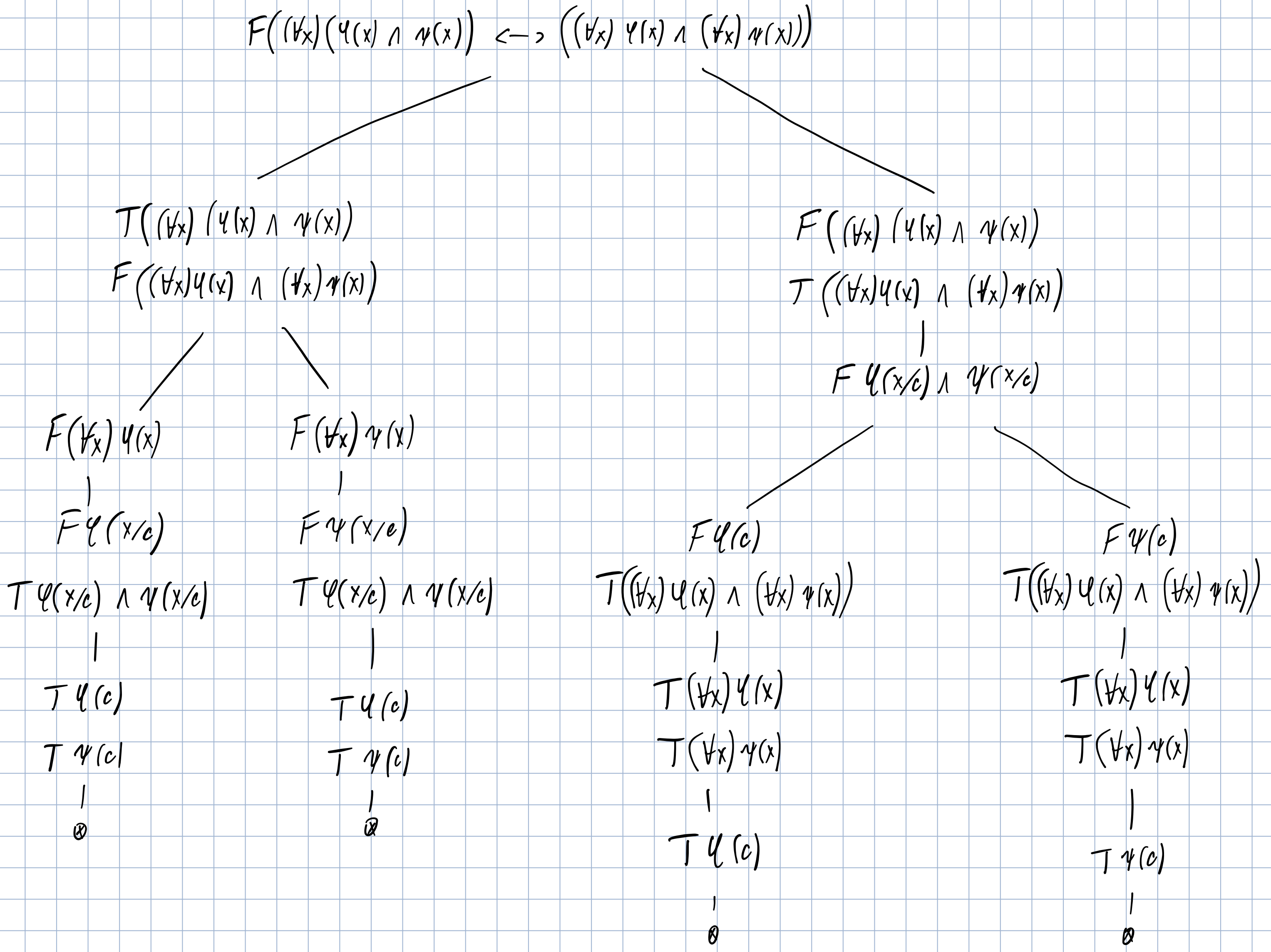
Dokázáno!

$$((Qx)\varphi \to \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$

$$\neg(Qx)\varphi \vee \psi \sim ((\bar{Q}x)\neg\varphi \vee \underline{\psi} \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$



Tato větev neobsahuje spor,
čili se nejedná o tablo-důkaz



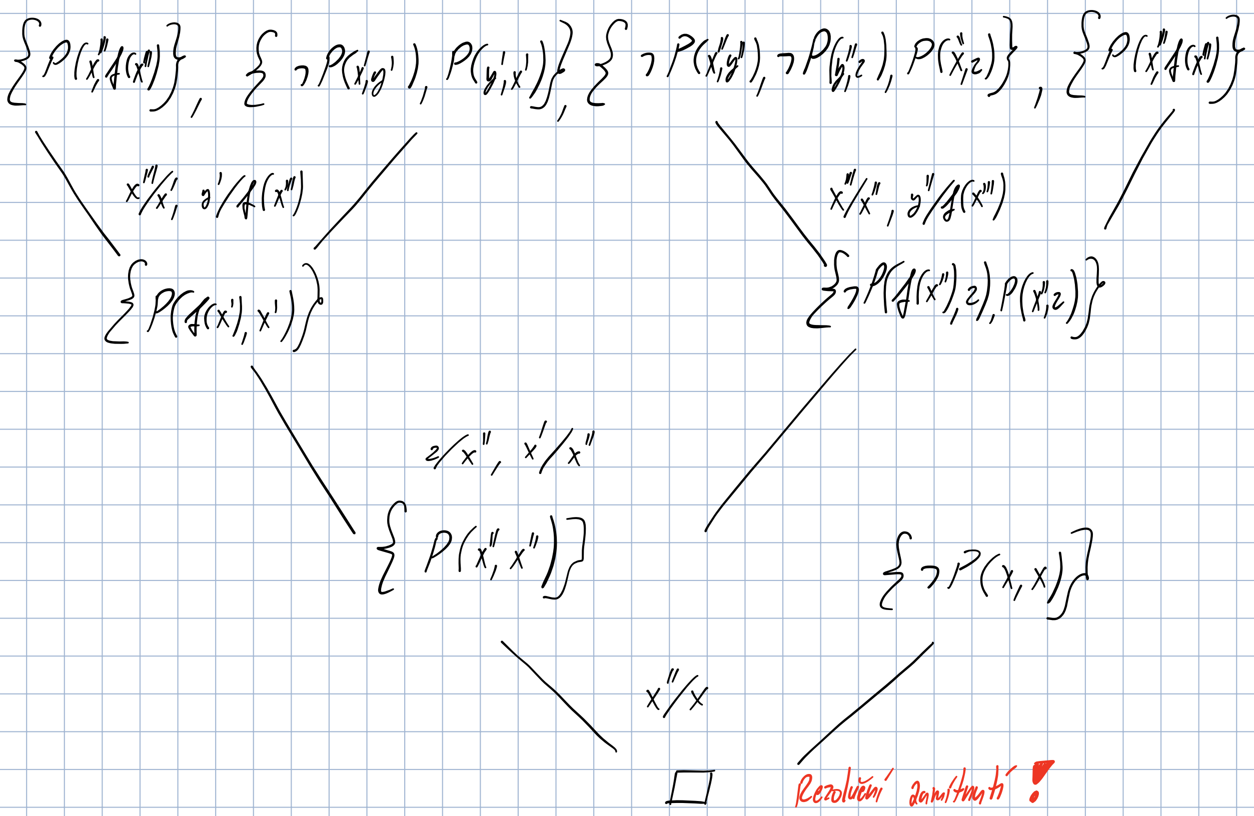
Rezoluce:

Pokud mám teorii a chci ověřit $T \models \varphi$, tak musím přidat $\neg\varphi$ do teorie. Pokud to tablem zamítnu, tak neexistuje žádný model, ve kterém by $\neg\varphi$ platilo. Tedy pak v T platí φ.

Tzn. jenom u formule k ověření přidám negaci, u ostatních to nechám stejně.

$T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \rightarrow P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)\}$

$T \models (\exists x) \neg P(x, f(x)) \qquad \neg(\exists x)\neg P(x,f(x)) \quad \sim \quad \cancel{\neg}\neg(\forall x) P(x, f(x))$



$\{P(x'', f(x''))\},\ \{\neg P(x', y'), P(y', x')\},\ \{\neg P(x'', y''), \neg P(y'', z), P(x'', z)\},\ \{P(x'', f(x''))\}$

$x'''/x',\ y'/f(x''')$

$\{P(f(x'), x')\}$

$x'''/x'',\ y''/f(x''')$

$\{\neg P(f(x''), z), P(x'', z)\}$

$z/x'',\ x'/x''$

$\{P(x'', x'')\}$

$\{\neg P(x, x)\}$

x''/x

$\square$

Rezoluční zamítnutí !

$\{P(x),\ Q(x,y),\ Q(x, f(z))\},\ \{\neg P(u),\ \neg Q(f(u), u)\}$

$$\varphi: (\exists y)(P(x,y) \land R(y)) \dashrightarrow ((\exists y)P(x,y) \land (\exists y)R(y))$$

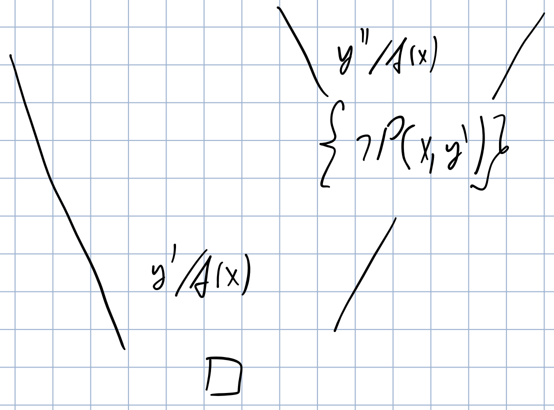
$$\neg\varphi: \quad (\exists y)(P(x,y) \land R(y)) \land (\neg(\exists y')P(x,y') \lor \neg(\exists y')Ry'))$$

$$(\exists y)(P(x,y) \land R(y)) \land ((\forall y')\neg P(x,y') \lor (\forall y'')\neg R(y''))$$

$$\forall x \exists y \forall y' \forall y'' (P(x,y) \land R(y) \land (\neg P(x,y') \lor \neg R(y''))$$

$$y = f(x) \;/\; \forall x \forall y' \forall y'' (P(x,f(x)) \land R(f(x)) \land (\neg P(x,y') \lor \neg R(y'')))$$

$$\{P(x,f(x))\}, \{R(f(x))\}, \{\neg P(x,y'), \neg R(y'')\}$$



$$\varphi(x,u,v) \quad (\exists y)(E(u,y) \land E(y,x) \land \neg(u=y) \land \neg(y=x)) \land (E(v,x) \land \neg(v=x))$$

Množim všech vrcholů:

$$\varphi^{T,u,v}(x,y,z) = \{a \in T \mid T \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$$

$$\varphi(x,u,v) := \quad \ldots$$

$$\varphi^{G,u,v}(x,y,z) := \{a \in G \,/\, G \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$$

$\{P(x), Q(x,y), Q(x,f(z))\}, \{\neg P(u), \neg Q(f(u),u)\}$

$Q(x,f(v)), \quad Q(x,f(v)) \qquad\qquad \neg Q(f(f(v)),f(v))$

$\{P(f(f(v)), Q(f(f(v)),f(v)), Q(f(f(v)),f(v))\}, \{\neg P(f(v)), \neg Q(f(f(v)),f(v))\}$

$\{P(f(f(v))), \neg P(f(v))\}$